6. Grupos de transformaciónes y funciónes I

6.1. Acciónes de grupos y orbitas

Sea G un grupo y S un conjunto.

¿Se dice que G actúa sobre S (a la izqda) si se fijó un mapeo

$$\rho : G \times S \longrightarrow S \quad \text{t.q.}$$

- $\rho(e, s) = s \quad \forall\, s \in S$

- $\rho(g_1 g_2, s) = \rho(g_1, \rho(g_2, s))$

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad s \in S$$

$\Rightarrow \forall g \in G: \; \rho(g): S \longrightarrow S$

$$s \to \rho(g, s)$$

es una permutación de S

- $\rho(e) = id_S$

- $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 \circ g_2)$

(tenemos un homomorfismo de grupos de G en el grupo de permutaciones de S)

- Si no hay peligro de confusión sobre el tipo de acción escribimos $g \cdot s$ para $\varphi(g,s)$.

$$Gs := \{gs \mid g \in G\} \subset S$$

la <u>órbita</u> de s bajo la acción de G sobre S.

- Dependiendo de la situación se puede pedir más propiedades sobre $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(S)$

e.g. que φ sea un homomorfismo

de grupos algebráicos $G \to \mathrm{Aut}(V)$

- Órbitas, por su construcción tienen un alto grado de simetría c. r. a G.

<u>Ejemplo</u> Sea $J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

y $G = \{ g \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid g^t J g = J \}$

es fácil ver que G es un subgrupo (de Lie) de $GL_3(\mathbb{R})$

$L = O(2,1)$

G actúa sobre $\mathbb{R}^3$ por mult. de matrices, y

$$G \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2-y^2-z^2=1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

un hiperboloide de dos hojas

de hecho tenemos aquí "="

(Ej. 6.1)

6.2 El álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{gl}}_\infty \subset \mathcal{A}$ de expresiones cuadráticas

Sea $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}+1/2} \left(\mathbb{C}\psi_j \oplus \mathbb{C}(\psi_j^*) \right) \subset \mathcal{A}$

Nos recordamos que para $w, w' \in W$

$$[w, w']_+ \in \mathbb{C} = \mathbb{C}\cdot 1$$

Ahora consideramos

$$Cl. \subseteq W^{(2)} = W \cdot W = \{ \sum_{i,j} w_i \cdot w_j \mid w_i, w_j \in W \}$$

$W^{(2)}$ es un álgebra de Lie

con el conmutador

$[-,-]$ $\quad ([a,b] = ab - ba)$

De hecho, para $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W$

tenemos

$$[w_1 w_2, w_3 w_4] = w_1 w_2 w_3 w_4 - w_3 w_4 w_1 w_2$$

$$= w_1 [w_2, w_3 w_4] + [w_1, w_3 w_4] w_2$$

$$= w_1 [w_2, w_3] + w_4 - w_1 w_3 [w_2, w_4] +$$

$$+ [w_1, w_3]_+ w_4 w_2 - w_3 [w_1, w_4]_+ w_2$$

$$\in W^{(2)}$$

porque $[w', w'']_+ \in \mathbb{C} \cdot 1$

$\forall\, w', w'' \in W$,

En particular, nos interesa el subálgebra $\mathfrak{gl}_\infty$ de $W^{(2)}$ que consiste de los elementos de carga 0, i.e. los elementos de la forma

$$\left(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}+1/2} a_{mn} \psi_{-m} \psi_n^* \right) + a_c \cdot 1$$

$\{ a_{m,n} \in \mathbb{C},\ y\ a_c \in \mathbb{C}$

casi todos $= 0 \}$

Basado en nuestro cálculo del corchete de Lie en $W^{(2)}$ vemos

$$[\psi_{-m} \psi_n^*, \psi_{-m'} \psi_{n'}^*]$$

$$= \delta_{n,m'} \psi_{-m} \psi_{n'}^* - \delta_{n',m} \psi_{-m'} \psi_n^*$$

Esta relación es la misma que se tenía para las matrices elementales

$$E_{m,n} = \left(\delta_{i,m} \cdot \delta_{j,n} \right)_{i,j \in \mathbb{Z}+1/2}$$

(matrices de "tamaño" "$\infty \times \infty$" con una sola entrada 1 y las demás $=0$.)

y vemos que con la mult. ordinaria de matrices tenemos

$$E_{m,n} \cdot E_{m',n'} = \delta_{n,m'} E_{m,n'}$$

$$\Rightarrow [E_{m,n}, E_{m',n'}] = \delta_{n,m'} E_{m,n'} - \delta_{m',n} E_{m',n}$$

$\rightsquigarrow$ las mismas relaciones de conmutación como para nuestro

$$\psi_{-n} \psi_n^* \quad !$$

lo cual justifica el nombre

$\mathfrak{gl}_\infty$.

Necesitamos un algebra un poco más grande que contenga los elementos

$$H_n := \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j}\,\psi^*_{j+n}:$$

Por eso definimos

$$(6.8)\quad \tilde{\mathfrak{gl}}_\infty = \Big\{ X_A := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}+1/2} a_{mn} :\psi_{-m}\psi^*_n: \Big.$$

$\ldots \mid a_{m,n} \in \mathbb{C}$ y $\exists N > 0$

t.q. $a_{m,n} = 0$ si $|m-n| > N \}$

H_n corresponde a una matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Vamos a ver el efecto de

nuestro cambio de $\psi_{-m}\psi_n^*$

a $:\psi_{-m}\psi_n:$ (de nuestras

sumas netamente infinitas)

Calculamos y nos

$$[X_A, X_B] = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} b_{kl} [:\psi_{-i}\psi_j^*:, :\psi_{-k}\psi_l^*:]$$

y nos recordamos

$$:\psi_{-m}\psi_n^*: = \psi_{-m}\psi_n^* - \langle \psi_{-m}\psi_n^* \rangle$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i,j,k,l} a_{ij}\, b_{kl} \left(\delta_{jk} \psi_{-i} \psi_l - \delta_{li} \psi_{-k} \psi_j^* \right)$$

$$= \sum a_{ij}\, b_{jl} \left(:\psi_{-i} \psi_l^*: + \delta_{il}\, \theta(i<0) \right)$$

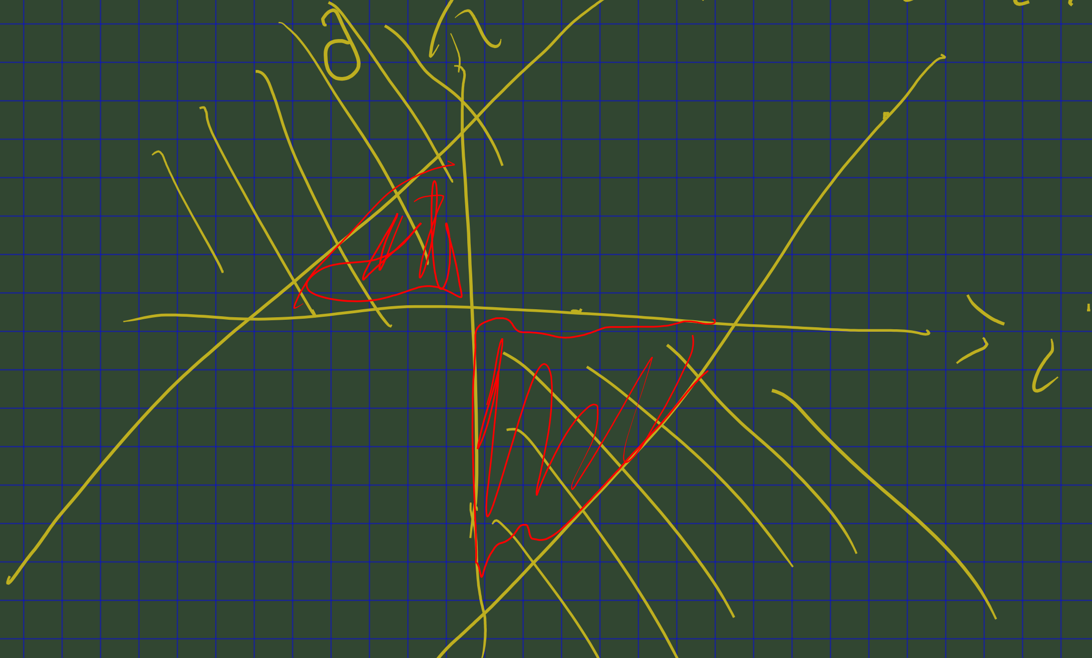
$$- \sum b_{kj}\, a_{ij} \left(:\psi_{-k} \psi_j^*: + \delta_{kj}\, \theta(j<0) \right)$$

$$= X_{[A,B]} + \omega(A,B)$$

con

$$\omega(A,B) = \sum_{i,j} a_{ij}\, b_{ji} \left(\Theta(i<0) - \Theta(j<0)\right)$$

- Observemos que la suma que definió $\omega(A,B)$ es en realidad finita!



Lema La forma ω del cálculo anterior cumple la condición "de cociclo de Lie"

$$\omega(A,[B,C]) + \omega(B,[C,A]) + \omega(C,[A,B]) = 0$$

y por eso en $\tilde{\mathfrak{gl}}_\infty$ el corchete cumple la identidad de Jacobi! (Ej. 6.2.)

También nos será útil observar:

Si $X_A \in \hat{\mathfrak{g}}_0$ tenemos en vista de (5.8) y (5.9)

$$[X_A, \psi_{-n}] = \sum_m a_{mn} \psi_{-m}$$

$$y\ [X_A, \psi_m^*] = -\sum_n a_{mn} \psi_n^* \qquad (6.11)$$

Esto implica:

Para todo $\langle u|, \langle u'| \in \mathcal{F}^*$

y $|v\rangle, |v'\rangle \in \hat{\mathcal{F}}$

tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \left(\langle u|[X_A, \psi_{-n}]|v\rangle \cdot \langle u'|\psi_n^*|v'\rangle \right.$$

$$\left. + \langle u|\psi_{-n}|v\rangle\langle u'|[X_A, \psi_n^*]|v'\rangle \right)$$

Ejer.

$$= 0 \iff (6.12)$$