$w(x,z)$ y $w^*(x,z)$ cumplen la identidad bilineal de Hirota

Resumen El álgebra de Lie

$$gl_\infty(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \mathbb{C}E_{ij} \subset W^{(2)} \subset A$$

$$E_{ij} \longmapsto \psi_{-i}\psi_j^*$$

con el conmutador usual de matrices

actúa sobre el espacio de Fock fermiónico $\mathcal{F} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{F}}_l$

Para varias aplicaciones futuras (e.g. la jerarquía KdV) queremos la acción de un álgebra (grupo) de Lie más grande

$$\overline{gl}_\infty(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} \;\middle|\; \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ con } a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| > N \right\}$$

sin embargo, por ejemplo el operador $\sum_{i \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_{-i} \psi_i^*$ no está bien definido sobre $\mathcal{F}$

Este problema se resuelve con la siguiente extensión central con un elemento nuevo K y el cociclo de Lie $\omega : \overline{gl}_\infty \times \overline{gl}_\infty \to \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow \quad gl(\infty) = \overline{gl}_\infty \oplus \mathbb{C} K$

con el corchete

$$[A + \lambda K, B + \mu K] := AB - BA + \omega(A,B) \cdot K$$

$gl(\infty)$ lo podemos insertar

en $\overline{W}^{(2)}$ como

$$A + \lambda K \longrightarrow X_A + \lambda \cdot 1_{\mathcal{A}}$$

$$X_A := \sum_{i,j \in \mathbb{Z}+1/2} a_{ij} : \psi_{-i} \psi_j^* :$$

Observamos

$$\mathfrak{a}_\infty := \{ A + \lambda K \in \mathfrak{gl}(\infty) \mid \operatorname{tr}(A) = 0 \}$$

$$\cup$$

$$\mathfrak{sl}_2$$

El grupo $GL_\infty(\mathbb{C})$ consiste de las matrices invertibles g de tamaño $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$ tal que

$$g_{ij} - \delta_{ij} = 0 \quad \text{para casi todo } (i,j)\in(\mathbb{Z}+1/2)^2$$

Obs $\mathrm{Lie}(GL_\infty(\mathbb{C})) = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ tenemos un operador $GL(\infty)$

$\exp : \mathfrak{gl}_\infty \longrightarrow GL_\infty$ $L := \mathfrak{gl}(\infty)$

Observaciones (a) Si tenemos tenemos un grupo de Lie G (simplemente conexo) con $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ entonces cada rep.

$$r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_V$$

de $\mathfrak{g}$ sobre un esp. vect. V se levanta a una rep. R de

$$R : G \longrightarrow GL_V$$

(hom. de grupos de Lie)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}_V \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "R"] & GL_V \end{tikzcd}$$

b) Si $r : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_V$ es una rep. de $\mathfrak{g}$ sobre V entonces

"$r \otimes id_V + id_V \otimes r$" es una rep. de $\mathfrak{g}$ sobre $V \otimes V$

$a \in \mathfrak{g}$ actua sobre $V \otimes V$ como

$$a\otimes b \mapsto r(a)\otimes b + a\otimes r(b)$$

y $\exp(\overset{n}{r}\otimes id + id\otimes r) = R\otimes R$

en otras palabras, $\mathfrak{g}$ actúa sobre $V\otimes V$ como

$$g(a\otimes b) = ga\otimes gb \;!$$

Lema Consideramos el elemento

$$\Omega := \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-i}\otimes\psi_i^* \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})$$

entonces para cada $g \in GL_\infty$ tenemos

$$\Omega \circ (g \otimes g) = (g \otimes g) \circ \Omega$$

i.e., para todo $|m\rangle, |n\rangle \in \mathcal{F}$ y $g \in GL_\infty$ tenemos

$$\sum_i g\,\psi_{-i}|m\rangle \otimes g\,\psi_i^*|n\rangle$$

$$= \sum_i \psi_{-i}\,g|m\rangle \otimes \psi_i^*\,g|n\rangle$$

Dem. Por la observación es suficiente verificar la "versión infinitesimal" de esta obs; para la acción de $\mathfrak{gl}_\infty$ sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$.

$$\sum_i \left(X_A \psi_{-i} |m\rangle \otimes \psi_i^* |n\rangle \right.$$

$$\left. + \quad \psi_{-i} |m\rangle \otimes X_A \psi_i^* |n\rangle \right)$$

$$=$$

$$\sum_i \left(\psi_i X_A |m\rangle \otimes \psi_i^* |n\rangle \right.$$

$$\left. + \psi_i |m\rangle \otimes \psi_i^* X_A |n\rangle \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \left([X_A, \psi_{-i}] |m\rangle \otimes \psi_i^* |n\rangle \right.$$

$$\left. + \psi_{-i} |m\rangle \otimes [X_A, \psi_i^*] |n\rangle \right)$$

$$= 0$$

Esto sigue directamente de (6.11)

Teorema (Comparar dem. de Tma 6.2 y Tma 9.3)

a) Para todo diagrama de Maya $\underline{m}>$ de carga 0 tenemos

$t\cdot\underline{m}> \in GL_\infty|vac> \quad \forall t\in\mathbb{C}^*$

b) $GL_\infty|vac> = \{ w\in \mathcal{F} \mid$

$$(*)\ \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-i}\, u> \otimes \psi_i^*\, u> = 0$$

($Gl_\infty \cdot \left(|vac\rangle \otimes |vac\rangle \right) \subseteq \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}$

$$\| $$

$$\{ u \otimes u \in \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}} \mid \Omega(u \otimes u) = 0 \})$$

<u>Dem.</u>: Empezamos con la inclusión "$\subseteq$" de b):

$$\psi_{-i} |vac\rangle \otimes \psi_i^* |vac\rangle = 0$$

$$\forall i \in \mathbb{Z} + 1/2$$

(siempre uno de los dos factores es 0)

$$\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-i}|vac\rangle \otimes \psi_i^*|vac\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} g\,\psi_{-i}|vac\rangle \otimes g\,\psi_i^*|vac\rangle$$

Lema

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_i \underbrace{g|vac\rangle}_{u} \otimes \psi_i^* \underbrace{g\,|vac\rangle}_{u}$$

$\Rightarrow$ para todo $u \in GL_\infty|vac\rangle$,

$\ast$ $\Omega_0(u\otimes u) = 0.$

Antes de demostrar "$\geq$"

vamos a demostrar a) porque

lo vamos a ocupar

a) Observamos: para $i, j \in \mathbb{Z} + 1/2$

con $i + j \neq 0$ sea

$$\varphi = \psi_i + \psi_{-j}$$

$$\varphi^* = \psi^*_{-i} + \psi^*_j$$

$$\Rightarrow [\varphi, \varphi^*]_+ = 2$$

$$\Rightarrow (\varphi^* \varphi)^n = 2^{n-1} \varphi^* \varphi$$

$$(\varphi^*\varphi)^2 = -\varphi^*\varphi^*\varphi\varphi + \varphi^* 2\varphi$$

$$\Rightarrow e^{t\varphi^*\varphi} = 1 + (e^{2t}-1)\varphi^*\varphi/2$$

$$\Rightarrow e^{\pi i/2\,\varphi^*\varphi} = 1 - \varphi^*\varphi \in G\ell_\infty$$

Ahora consideramos un diag. de Maya de carga 0

$$|\underline{m}\rangle = \psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi^*_{n_1}\cdots\psi^*_{n_r}|vac\rangle$$

con $m_1 < m_2 < \dots < m_r < 0$

$n_1 < n_2 < \dots < n_r < 0$

y ahora calculamos (9.7)

$$\underbrace{\left(1-(\psi^*_{-m_1}+\psi^*_{n_1})(\psi_{m_1}+\psi_{-n_1})\right)}_{\in GL_\infty}|m\rangle$$

$$\overset{(!)}{=} (-1)^{r-1}\,\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi^*_{n_2}\cdots\psi^*_{n_r}|vac\rangle$$

así se demuestra a) por inducción.

a) "$\supseteq$"

Sea $u \in \mathcal{F}_0$

$$\parallel$$

$$\sum_{\underline{m},\underline{n}} c_{\underline{m},\underline{n}} \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_1} \cdots \psi^*_{n_r} |vac\rangle$$

Escogemos $0 \neq c_{\underline{m},\underline{n}}$ con r mínimo

Por (9.7) existe $g \in Gl_\infty$ t.q.

$$u' = gu = |vac\rangle + \sum_{i,j \leq 0} c_{ij} \psi_i \psi_j^* |vac\rangle + \cdots$$

sumandos con
por lo menos 4 fact.

con $g_2 := \exp\left(-\sum_{i,j<0} c_{ij}\, \psi_i \psi_j^*\right)$

obtenemos

$$|u''\rangle = g_2 |u'\rangle = |vac\rangle + \sum_{i,j,k,l<0} c_{ijkl}\, \psi_i \psi_j \psi_k^* \psi_l^*$$

$$+ \cdots$$

sumandos de
carg $\geqslant 6$

$\underline{u''} \rangle = \mathrm{vac} \rangle + \tilde{u}'' \rangle$

$\uparrow$
n

$\sum$ longs ≥ 4

Si

$$\sum_i \psi_{-i} | u \rangle \otimes \psi_i^* | u \rangle = 0$$

Lemme
$\Rightarrow$

$$\sum_i \psi_{-i} | u'' \rangle \otimes \psi_i^* u'' \rangle = 0$$

$$\|$$

$$\sum_{i<0} \psi_{-i} | \tilde{u}'' \rangle \otimes \psi_i^* | \mathrm{vac} \rangle$$

$$+ \psi_{-i} \tilde{u}'' \rangle \otimes \psi_i^* | \tilde{u}'' \rangle$$

$$\sum_{i>0} \Big(\boxed{\psi_i |vac\rangle \otimes \psi_i^* |\tilde{u}''\rangle} + \psi_{-i} \tilde{u}''\rangle \otimes \psi_i^* \tilde{u}''\rangle \Big)$$

no se cancelan con los otros sumandos!

$$\Rightarrow \psi_i^{(*)} \tilde{u}''\rangle = 0 \quad \forall i > 0$$

por la forma de $\tilde{u}''\rangle$

eso significa $\tilde{u}''\rangle = 0$,

$\square$