3. Grassmannianas y representaciones fundamentales

Nuestra meta final es identificar la órbita $GL_\infty(vac) \subset \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]$

cor. B-F

con el cono afín sobre la Grassmanniana infinita (por definir) en la inmersión de Plücker, identificar las ecuaciones de la jerarquía de KP con las relaciones de Plücker (cap. 10)

Para razones didácticas estudiamos el 9.1. la situación del espacio de Fock de dimensión finita y el álgebra de Clifford correspondiente,

9.1. El espacio de Fock de dimensión finita y Grassmannianas clásicas

Sea $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ y consideramos el álgebra de Clifford de dimensión finita

$$\mathcal{A}_N := \frac{\mathbb{C}\langle \psi_i, \psi_i^* \mid i \in \mathbb{Z}+1/2,\ |i| \leq N \rangle}{\langle [\psi_i, \psi_j]_+ = 0,\ [\psi_i^*, \psi_j^*]_+ = 0,\ [\psi_i, \psi_j^*]_+ = \delta_{i+j,0} \rangle}$$

"Ejercicio"

$$\mathcal{A}_N \cong \mathrm{Mat}_{2^{2N} \times 2^{2N}}(\mathbb{C})$$

el anillo de matrices de tamaño $2^{2N} \times 2^{2N}$ sobre $\mathbb{C}$.

(hay toda una teoría de álgebras de Clifford $Cl(W,Q) :=$

$$T(W) / \langle w \otimes w - Q(w) \ \forall w \in W \rangle$$

donde $T_k(W) := \bigoplus_{n \geq 0} (T^{\otimes n} W)$

W: un K-esp. vect. y

$Q : W \to Q$ forma cuadrática no degenerada

En nuestro caso:

$V_N := \bigoplus_{1 \leq i \leq N} \mathbb{C}\psi_i$, $V_N^* := \bigoplus_{1 \leq i \leq N} \mathbb{C}\psi_i^*$

$$W = W_N = V_N \oplus V_N^*$$

$$Q\left(\sum_i a_i \psi_i + \sum b_j \psi_j^*\right) = \sum_i a_i b_{-i}$$

El espacio de Fock es en este caso

$$\mathcal{F}_N := \Lambda V_N^* = \bigoplus_{j=0}^{2N} \Lambda^j V_N^*$$

tiene dimensión 2^{2N}

(porque $\dim \Lambda^j V_N^* = \binom{2N}{j}$)

$$|vac\rangle = \psi^*_{1/2} \wedge \psi^*_{3/2} \wedge \dots \wedge \psi^*_{N-1/2}$$

y definimos: $\Lambda^j V_N^* := \mathcal{F}_{N-j}$

En analogía con el Cap. 4

asignamos a

$$\psi_{i_1}^* \wedge \psi_{i_2}^* \wedge \ldots \wedge \psi_{i_\ell}^* \in \mathcal{F}_N$$

el diagrama de Maya

con $2N$ fichas en las posiciones

de $-N+1/2, \ldots, N-1/2$

con fichas negras en las posiciones

$i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ y

definimos

$$\psi_i^* \cdot (\psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_l}^*)$$

$$=: \psi_i^* \wedge \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_l}^*$$

$$\psi_i \cdot \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_l}^*$$

$$:= \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j'} [\psi_i, \psi_{i_j}^*] + \psi_{i_1}^* \wedge \dots \widehat{\psi_{i_j}^*} \wedge \dots \psi_{i_l}^*$$

Afirmamos que con estas

definiciones $\tilde{\mathcal{F}}_N$ tiene estructura

de $\mathcal{A}_N$ - módulo <u>simple</u>.

(Ejercicio)

Hay que demostrar que $\tilde{\mathcal{F}}_N = \mathcal{A}_N \cdot v$

para <u>todo</u> $v \in \tilde{\mathcal{F}}_N \setminus \{0\}$

Como $\dim \tilde{\mathcal{F}}_N = 2^{2N}$ y

$\dim \mathcal{A}_N = 2^{2N} \times 2^{2N}$

$\mathcal{A}_N \cong Mat_{2^{2N} \times 2^{2N}}(\mathbb{C})$

(densidad de Jacobson)

Sea $g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}_N)$ (un elemento invertible de $\mathcal{A}_N$)

y estudiamos el automorfismo $\mathbb{C}$-lin. (interno) de $\mathcal{A}_N$ ~~de~~ :

$$T_g : \mathcal{A}_N \longrightarrow \mathcal{A}_N, \quad a \longmapsto g a g^{-1}$$

(claramente $T_g(ab) = T_g(a) T_g(b)$)

además $T_g \circ T_{g'} = T_{gg'}$ y

$$T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$$

$\Rightarrow T_g : \mathcal{U}(\mathcal{A}_N) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_N)$

$g \longmapsto T_g$

es un homomorfismo de grupos

con $\mathrm{Ker}\, T_g = \mathbb{C}^* \cdot 1_{\mathcal{A}_N}$

porque $T_g = id_{\mathcal{A}} \iff g a g = a$
$\forall a \in \mathcal{A}$

$\iff g a = a g \quad \forall a \in \mathcal{A}$

y en $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ solamente

los múltiples de $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

conmutan con todos los el. de $\mathrm{Mat}_{n \times n}$

Esto nos permite a definir

$$G(W_N) := \{ g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}_N) \mid T_g(W_N) = W_N \}$$

$$\leq \mathcal{U}(\mathcal{A}_N)$$

<u>grupo de Clifford</u>

Además consideramos la forma bilineal no degenerado

$$\langle -, - \rangle : W_N \times V_N \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(w, w') \longmapsto [w, w']_+ \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \cdot 1$$

y podemos definir el grupo ortogonal correspondiente

$$O(W_N) = \{ T \in GL(W_N) \mid \langle T(w), T(w') \rangle = \langle w, w' \rangle \ \forall\, w, w' \in W_N \}$$

Observamos que para $g \in G(W_N)$ entonces

$$T_g\big|_{W_N} \in O(W_N) \ !$$

Además T_g está determinado por su restricción a W_N porque W_N contiene a los generadores de $\mathcal{A}_N$;

Sea $g \in G(W_N)$ entonces

$$[T_g(w), T_g(w')]_+$$

$$= gw\cancel{g^{-1}g}w'g^{-1} + gw'\cancel{g^{-1}g}wg^{-1}$$

$$= g\underbrace{[w, w']_+}_{\in \mathbb{C}\cdot 1} g^{-1} = [w, w']_+$$

Teorema El mapeo

$$G(W_N) \to O(W_N), \; g \to T_g|_{W_N}$$

es un homomorfismo supraejectivo de grupos con nucleo $\mathbb{C}^* \cdot 1_{\mathcal{A}}$.

En particular

$$T_g|_{W_N} = T_{g'}|_{W_N} \Rightarrow g' = cg$$

para algún $c \in \mathbb{C}^*$.

Obs: Ya vimos que para $g \in G(W_N)$

$\hspace{6em}\wedge$

$U(\mathcal{A}_N)$

$T_g|_{W_N} \in O(W_N)$ y

T_g está determinado por $T_g|_{W_N}$

y por eso el núcleo

no se hace más grande.

La afirmación sobre el núcleo implica que

$$T_g|_{W_N} = T_{g'}|_{W_N} \Rightarrow T_g = T_{g'}$$

$\Rightarrow$ $g' = c\, g$ para algún $c \in \mathbb{C}^*$.

La afirmación sobre la suprayectividad es no trivial (la omitimos)

$\square$

Ahora identificamos el grupo $GL(V_N^*)$ con el subgrupo $G_N < O(W_N)$ que consiste de los elementos de la forma

$$\begin{pmatrix} g^{-T} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : \underbrace{V_N \oplus V_N^*}_{W_N} \to V_N \oplus V_N^*$$

si identificamos V_N con V_N^* vía el mapeo

$$\psi_i \longmapsto \psi_{-i}^*$$

(Ej: verifica que eso realmente define un el. de $O(W_N)$)

Lema Para $g \in GL(V_N^*) < O(W_N)$ ~~g~~ existe $\tilde{g} \in G(W_N)$ t.q.

$$T_{\tilde{g}}\Big|_{W_N} = \begin{pmatrix} g^{-T} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad y$$

si $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_\ell \in \Lambda^\ell V_N^* \in \mathcal{F}_N$

entonces

$$\tilde{g} \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell) = g v_1 \wedge \dots \wedge g v_\ell \,!$$