Rec. Definimos

① $\tilde{\mathfrak{g}} := \hat{\mathfrak{g}} / \hat{K}$

$\hat{\mathfrak{g}} :=$ libre $/\mathbb{C}$ con gen $\hat{x}_i, \hat{h}_i, \hat{y}_i$
$i = 1, \dots, \ell$

$\hat{K} := \langle (S1) - (S3) \rangle$

$\tilde{x}_i := \hat{x}_i + \hat{K}$, $\tilde{y}_i := \hat{y}_i + \hat{K}$, $\tilde{h}_i := \hat{h}_i + \hat{K}$

$\in \tilde{\mathfrak{g}}$ generadores

② $\hat{\mathfrak{g}}$ es Γ-graduado, donde

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$$

$\deg(\hat{x}_i) := \alpha_i$, $\deg(\hat{y}_i) = -\alpha_i$

$\deg(\hat{h}_i) := 0$

$\rightsquigarrow$ $\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} \hat{\mathfrak{g}}_\lambda$ $\qquad [\hat{\mathfrak{g}}_\lambda, \hat{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \hat{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$

$\hat{x}_i \in \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}$ etc.

Las relaciones (S1)-(S3) son homogeneas con resp. a esta graduación:

- $\deg([\hat{h}_i, \hat{h}_j]) = 0$ $\qquad$ (S1)
- $\deg([\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \alpha_i - \alpha_j & \text{otr.} \end{cases}$
- $\deg([\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji} x_j) = \alpha_j$

$\Rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ es Γ-graduado,

(3.) Los generadores $\hat{x}_i, \tilde{h}_i, \tilde{y}_i$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ son lin. indep. / $\mathbb{C}$:

Para esto introducimos una repr

$$\tilde{T} := T V \quad \text{con} \quad V = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{C} v_j$$

$\tilde{T}$ tiene $\mathbb{C}$-base

$$v_{i_1 \dots i_t} := v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_t}$$

$$v_{\emptyset} := 1_{\tilde{T}}$$

$\tilde{T}$ es Γ- graduado si definimos

$$\deg v_{i_1 \dots i_t} = -\sum_{j=0}^{t} \alpha_{i_j}$$

$$\mathfrak{I}_\lambda = \bigoplus \mathbb{C}\, v_{i_1 \cdots i_t}$$

$i_1, i_2, \dots, i_t :$

$-(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t}) = \lambda$

(cada $\mathfrak{I}_\lambda$ es de dim. finita!)

$\tilde{h}_j$ actúa sobre $\mathfrak{I}_\lambda$ por el escalar $(\lambda, \alpha_j^\vee)$

(todos los básicos son vectores propios simultáneos para los $\hat{h}_j$'s)

$$\tilde{y}_j \cdot v_{i_1 \cdots i_t} := v_{j, i_1, i_2 \cdots i_t}$$

$\tilde{x}_j \cdot 1 := 0$ y recursivamente

$$\tilde{x}_j \cdot v_{i_1 \dots i_t} := \delta_{j,i_t}\, \tilde{h}_j \cdot v_{i_2 \dots i_t}$$

$$+ \tilde{y}_j \left(\tilde{x}_{i_1} \cdot v_{i_2 \dots i_t} \right)$$

- Es fácil ver que los operadores $\tilde{h}_j$, $\tilde{x}_i \cdot$, $\tilde{y}_i \cdot$ sobre $\tilde{S}$ cumplen las relaciones (S1) – (S3) y son de homogeneos de grado 0, α_i, resp. $-\alpha_i$!

claramente ninguno de los operadores es nulo.

En particular, los operadores

$\hat{h}_i$ son lin. independientes

(en vista de sus valores propios)

$\therefore$ Por razones de grado los operadores

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{h}_i \mid i=1,\dots,l\}$$

son lin. indep.

$$\Rightarrow \{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{h}_i \mid i=1,\dots,l\} \subset \tilde{g}$$

son lin. indep. $/\mathbb{C}$.

(4) Sean $\tilde{X}$ el subálg. de $\tilde{g}$ que es

gen. por los $\tilde{x}_i$ $i=1,2,\dots,l$

$\tilde{H}$ el subalg. de $\tilde{g}$ que es

gen. por los $\hat{a}_i$, $i=1,\dots,l$

$\tilde{Y}$ .. gen por los $\tilde{y}_i$ $i=1,\dots,l$.

Afirmamos, que como esp. vect. tenemos

$$g = \tilde{X} \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{Y}$$

Por razones de grado

$$\tilde{X} \subset \bigoplus_{\alpha>0} g_\alpha \,, \quad \tilde{H} \subset g_0 \,, \quad Y \subset \bigoplus_{\alpha<0} g_\alpha$$

$$\alpha < 0 :\Rightarrow 0 \neq \alpha = \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i$$ con $a_i \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\tilde{X} \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{Y}}_{} \leq \tilde{\mathfrak{g}}$$

la suma es directa por razones de grado

Por otro lado $\tilde{X} \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{Y}$ es estable bajo la acción de $ad(\tilde{x}_i)$, $ad(\tilde{h}_i)$ y $ad(\tilde{y}_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, \ell$.

claro: $ad(\tilde{x}_i)(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$ etc.

$$ad(\tilde{x}_i)(\tilde{H}) \subset \tilde{X} \oplus \tilde{H}$$

$$ad(\tilde{x}_i)(\tilde{Y}) \subset \tilde{H} \oplus \tilde{Y}$$

$$ad(\tilde{h}_i)(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$$

etc.

$\therefore$ $\tilde{X} \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{Y}$ es un subálg. de $\tilde{\mathfrak{g}}$ que contiene a los generadores de $\tilde{\mathfrak{g}}$ $\Rightarrow$ " = ".

(5) Para $i \neq j$ definimos

$$\tilde{x}_{ij} := ad(\tilde{x}_i)^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle} (\tilde{x}_j)$$

$$\tilde{y}_{ij} := ad(\tilde{y}_i)^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle} (\tilde{y}_j)$$

rec.: $\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle := (\alpha_j, \alpha_i^{\vee}) \in \{0, -1, \dots, -3\}$

comparar con $(S_{ij}^{+/-})$!

Afirmamos que

$$[\tilde{x}_k, \tilde{y}_{ij}] = 0 \quad \forall\, i,j,k = 1, \dots, l. \\ i \neq j$$

Hay que analizar varios casos por separado.

- $k \notin \{i,j\}$ es claro porque tenemos $[\tilde{x}_k, \tilde{y}_i] = 0 = [\tilde{x}_k, \tilde{y}_j]$ (S2)

- $k = j \Rightarrow k \neq i$ porque $j \neq i$

$\Longrightarrow [ad(\tilde{x}_j), ad(\tilde{y}_i)] = 0$

$\Longrightarrow$

$$[\tilde{X}_{k}, \tilde{Y}_{ij}] = \mathrm{ad}(\tilde{X}_{k})\,\mathrm{ad}(\tilde{Y}_{i})^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}(\tilde{Y}_{j})$$

$$k = j$$

$$= \mathrm{ad}(\tilde{Y}_{i})^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}\underbrace{[\tilde{X}_{j}, \tilde{Y}_{j}]}_{\tilde{h}_j}$$

$$= \mathrm{ad}(\tilde{Y}_{i})^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle} \, , \, \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \tilde{Y}_i$$

$$= 0 \, .$$

(dos casos: $\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$

$\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle < 0 \Rightarrow \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle > 0$

pero $[\tilde{Y}_j, \tilde{Y}_j] = 0$)

• $k = i \Rightarrow k \neq j$

$$\Rightarrow [\tilde{x}_k, \tilde{y}_{i,j}] =$$

$$\mathrm{ad}(\tilde{x}_i)\,\mathrm{ad}(\tilde{y}_i)^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}(\tilde{y}_j)$$

Ahora, $\mathrm{ad}(\tilde{x}_i)\,\tilde{y}_j = 0$

$$\mathrm{ad}(\tilde{h}_i)\,\tilde{y}_j = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle\, \tilde{y}_j$$

es decir, la subrep. de $\tilde{g}$, vista como rep. de $\langle \tilde{x}_i, \tilde{h}_i, \tilde{y}_i \rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, vía ad, que es generada por $\tilde{y}_j$ es de peso máximo $-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y vector de peso máximo $\tilde{y}_j$.

De las representaciones de peso máximo $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sabemos que en este caso ya

$$\operatorname{ad}(\tilde{y}_i)^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle} \tilde{y}_j = 0$$

De la misma forma concluimos

$$[\tilde{y}_k, \tilde{x}_{i,j}] = 0$$