Rec.

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \hat{\mathfrak{g}} / \underbrace{((S1)-(S3))}_{\hat{K}}$$

generadores $\tilde{x}_i := \hat{x}_i + \hat{K}$ etc.

5 $\quad \tilde{x}_{ij} := \operatorname{ad}(\tilde{x}_i)^{1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}(\hat{x}_j) \quad i \neq j$

$$\Rightarrow [\tilde{y}_k, \tilde{x}_{ij}] = 0$$

lo mismo para $\tilde{x} \longleftrightarrow \tilde{y}$

⑥. Sea $\tilde{\mathfrak{k}} < \tilde{\mathfrak{g}}$ el ideal que es generado por los

$$\tilde{X}_{ij}\ ,\ \tilde{Y}_{ij}\quad (i \neq j)$$

así que

$$\tilde{\mathfrak{g}} / \tilde{\mathfrak{k}} = \hat{\mathfrak{g}} / (\text{Serre}) = \mathfrak{g}_{\Phi, \Delta}$$

(a veces vamos a escribir $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\Phi, \Delta}$)

Afirmamos que en

$$\tilde{X} := \mathrm{Lie}(\tilde{X}_i \mid i = 1, \dots, \ell) \subset \tilde{\mathfrak{g}}$$

(sumándose por los $\tilde{x}_i$)

el ideal $\tilde{I}_X$ (de $\tilde{X}$) que es

generado por los $\tilde{X}_{ij}$

es en realidad ya un ideal

en $\tilde{\mathfrak{g}}$!

Esto es fácil porque los

$\tilde{X}_{ij}$ son homogeneos en

la Γ-graduación de $\tilde{\mathfrak{g}}$

de grado $(1-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle)\alpha_i + \alpha_j \in \Gamma$

por eso los generadores de I_X

(y con esto todo $\hat{I}_x$) es estable (salvo escalares) bajo la acción de los $\mathrm{ad}(\tilde{h}_k)$'s por otro lado la ~~ac~~ acción de $\mathrm{ad}(\tilde{y}_k)$ es trivial por (5)

Por el mismo argumento, el ideal $\tilde{I}_y$ de $\tilde{y} := \mathrm{Lie}(\tilde{y}_i \mid i=1,\dots,\ell)$ que es generado (como ideal de $\tilde{y}$) por los $\tilde{y}_{ij}$ es de hecho un ideal de $\hat{\mathfrak{g}}$.

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\hat{K}} = \tilde{\hat{I}}_x \oplus \tilde{\hat{I}}_y$$

la suma es directa por razones de grado:

Por su definición, (como ideal de $\hat{X}$)

$$\tilde{\hat{I}}_x \subset \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

donde $\Gamma^+ := \left(\sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0}\, \alpha_i\right) \setminus \{0\}$

por los grados $\tilde{\hat{I}}_x \cap \tilde{\hat{I}}_y = 0$

y $\mathfrak{g}_{\Phi,\Delta} = \hat{x} / \tilde{\hat{I}}_x \oplus \tilde{H} \oplus \hat{y} / \tilde{\hat{I}}_y$

(7) Recordamos de (3) y (4):

- $0 \neq \hat{x}_i \in \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}$, $\cdot\ 0 \neq \hat{y}_i \in \hat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_i}$
- los $\tilde{h}_i$ $(i = 1, \dots, e)$ forman una

$\mathbb{C}$-base de $\tilde{H} = \hat{\mathfrak{g}}_0$

(en part. son lin. indep.) $(\hat{x}_i, \tilde{y}_i, \hat{h}_i)$

Los $x_i := \tilde{x}_i + \hat{K}$, $y_i := \tilde{y}_i + \hat{K}$

$$h_i := \tilde{h}_i + \tilde{K}$$

siguen siendo lin. independientes

en $\mathfrak{g}_{\underline{\Phi}, \underline{\Delta}} := \hat{\mathfrak{g}} / \tilde{K}$.

En vista de (6) para esto es

suficiente ver que

$0 \neq \tilde{x}_i + \tilde{I}_x \in \tilde{X} / I_x$

eso es claro por razones de grado, etc.

Además, los $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_i)$ y $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y_i)$ son endomorfismos localmente nilpotentes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{\Phi}, \Delta}$

De hecho, para cada $i = 1, \ldots, \ell$

$$\mathfrak{g}_i := \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(x_i)^j (x) = 0 \text{ para algún } j \geq 0 \right\}$$

(por def. $\mathfrak{g}_i$ es el subespacio de $\mathfrak{g}$

donde $ad(x_i)$ es loc. nilpot.)

$\mathfrak{g}_i$ es en realidad un subálg.

de Lie de $\mathfrak{g}$! (Ejercicios)

pero $\mathfrak{g}_i$ contiene a todos los

generadores de $\mathfrak{g}$:

$$ad(x_i)^{1-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}(x_j) = 0 \quad j \neq i$$

$$ad(x_i)(x_i) = 0$$

$$ad(x_i)(h_j) = \langle\alpha_j,\alpha_i\rangle x_i$$

$$\Rightarrow ad(x_i)^2(h_j) = 0$$

$$ad(x_i)(y_j) = \delta_{ij} h_i \quad \ldots$$

Eso significa que $\mathfrak{g}$, visto vía adjunción, como una repr. de $\mathfrak{g}^{(i)} := \mathrm{Lie}(x_i, h_i, y_i) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es la unión (de hecho suma directa) de las $\mathfrak{g}^{(i)}$-subrep. de $\mathfrak{g}$ de dim finita. (simples)

3 Por 7 para cada $\lambda \in \Gamma \supset \Phi$ con $n := \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ tenemos

$$\mathrm{ad}(y_i)^n : \mathfrak{g}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\lambda - n\alpha_i} = \mathfrak{g}_{s_i(\lambda)}$$

por la teoría de repn. de

$\mathfrak{g}^{(i)} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$!

$$\Rightarrow \boxed{\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{w(\lambda)}}$$

$\forall \lambda \in \Gamma$ y $w \in W$ (!)

gen. por las s_i's

En particular,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\lambda = 1 \quad \forall \lambda \in \overline{\Phi}$$

ya que por razones de grado

sabemos $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C} x_i$ $\quad i = 1, \dots, l$, usando que $g_{\alpha_i} \subset X = \tilde{X}/I_X$

por la desc. triangular de g.

y porque $\underline{\overline{\Phi}} = \bigcup_{i=1}^{l} W\alpha_i$

(10) Ahora queremos ver que para

$\lambda \in \Gamma \setminus (\underline{\overline{\Phi}} \cup \{0\}) \Rightarrow g_\lambda = 0$

- En un primer paso vemos que

para $\lambda = n\alpha$ con $n \geq 2$, $\alpha \in \underline{\overline{\Phi}}$

Si $g_\lambda \neq 0 \overset{(9)}{\Longrightarrow} g_{n\alpha_i} \neq 0$ para

algún $i = 1, \ldots, l$.

Pero esto implica en vista de (8)

($\mathfrak{g}$ descompone como $\mathfrak{g}^{(i)}$-repr. en suma directa de simples de dim. finita)

que $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} \geq 2$ ↯.

- Ahora por $\mathfrak{g} = X \oplus H \oplus Y$ sigue, si $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ $(\lambda \neq 0)$ implica

$$\lambda \in \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i \cup \sum_{i=1}^{\ell} -\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$$

$\Rightarrow$ (9) implica que $w\lambda$ tiene la misma propiedad $\forall w \in W$

Veremos en un Lema abajo que esto implica que ~~a~~ λ es un múltiplo de una raíz! es decir el caso anterior.

(11) $\mathfrak{g}$ es semisimple y su sistema de raíces es $\hat{=} \emptyset$.

Sea $I \subset \mathfrak{g}$ ideal no triv

en part. $\operatorname{ad}(h_i) I \subset I \quad \forall i = 1, \dots, l$

$$\Rightarrow I = \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup 0} (I \cap \mathfrak{g}_\alpha)$$

Nuevamente recurrimos a la teoría de repr. de $\mathfrak{g}^{(i)} = \mathrm{Lie}(x_i, h_i, y_i) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

nos dice que
$\lambda \in \Phi^+ \Rightarrow \lambda + \alpha_i \in \Phi$

$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{\alpha_i}] = \mathfrak{g}_{\lambda+\alpha_i}$

y si $\lambda - \alpha_i \in \Phi$ entonces

$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = \mathfrak{g}_{\lambda-\alpha_i}$

Entonces por el Cor A del 3.6

y vemos que si $I_\lambda \neq 0 \; (\Rightarrow I_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda)$

para algun $\lambda \in \Phi^+$ entonces

$I_{\alpha_i} \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, \ell$.

Similarmente si $I_\lambda \neq 0$ para algún

$\lambda \in \Phi^-$, entonces $I_{-\alpha_i} \neq 0$

* Si $I_\lambda = 0 \ \forall \ \lambda \in \Phi$, entonces

$I \subset H \implies \alpha_i(I) \neq 0$ para
α_i y α_i' eras
algun $i = 1, \ldots, \ell$

$\implies \mathfrak{g}_{\alpha_i} = [I, \mathfrak{g}_{\alpha_i}] \subset I$ $\ \lightning$

$\therefore \exists \ i$ con $\mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset I$

$\Rightarrow \mathfrak{g}^{(i)} \subset I \Rightarrow I$ <u>no</u> es abeliano $\Rightarrow \mathfrak{g}$ es s. s.

Fácil ver que H es un subalg. del Cartan de $\mathfrak{g}$ y que

$$\Phi \xrightarrow{\sim} R(\mathfrak{g}, H).$$