Teorema 1 ((Clasificación de los simples de peso más alto)

Sea $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ un álg. de Lie s.s / $\mathbb{C}$ con un subálg de Cartan y $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \underline{\Phi} \supset \Delta$ el sistema de raíces correspondiente con una base Δ y $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}^{+} \sqcup \underline{\Phi}^{-}$ desc. en raíces positivas / negativas. Entonces:

a) $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ es módulo de Verma $V(\lambda) = V(\lambda, \underline{\Phi}^+)$ tiene un único submódulo máximo $\mathrm{rad}\, V(\lambda)$

b) El cociente $L(\lambda) = L(\lambda, \underline{\Phi}^+) = V(\lambda) / \mathrm{rad}\, V(\lambda)$ es simple, y así obtenemos una biyección

$$\mathfrak{h}^* \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{repr. simples de } \mathfrak{g} \text{ con} \\ R^{+}\text{-peso máximo} \end{array} \right\} / \cong$$

$$\lambda \longmapsto L(\lambda)$$

c) Si una representación simple tiene un peso máximo, ya es de peso más alto.

Obs: ~~Si~~ En teoría de módulos el radical (de Jacobson) $\mathrm{rad}(M)$ de un R-módulo M es la intersección de todos los submódulos máximos.

En el caso $M = {}_R R$, esto es
el ~~ideal~~ radical de Jacobson de R -
un ideal bilateral!
En álg. commutativa el radical
$\sqrt{I}$ de un ideal $I \subset S$
$\| \{ s \in S \mid s^n \in I$ para algún $n \} \supset I$
es algo radicalmente (;-)) diferente;

Ejemplo Rec. $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pesos fund.}}}{\omega_\alpha}$

en el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\Phi = \{ \pm \alpha \}$
$\rho = \frac{1}{2} \alpha = \omega$ y $\underbrace{L(m)}_{\text{dim } m+1} = L(m\rho)$
es la repn. simple de peso ~~máximo~~
más alto ~~de dim~~ $m\rho$.
Para $\lambda \in \underset{\substack{\wr\wr \\ \mathbb{C}}}{\mathfrak{h}^*} \setminus \{ \mathbb{Z}_{\geq 0} \omega \}$, $V(\lambda)$ es simple
(de dim infinita)

Dem. Con $V(\lambda)$, también cada $\mathfrak{h}$-submódulo
$N \subset V(\lambda)$ es suma directa de sus
espacios de peso $N = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} N_\mu$ $(N_\mu \subset V(\lambda)_\mu)$
y con más razón esto aplica para los $\mathfrak{g}$-submódulos
Si $N \underset{\mathfrak{g}}{\subsetneq} V(\lambda)$ entonces $N \subset \bigoplus_{\mu \lneq \lambda} V(\lambda)_\mu$
ya que $V(\lambda)_\lambda = \mathbb{C} v_\lambda$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\lambda = V(\lambda)$.

Por eso, la suma de todos los submódulos propios de $V(\lambda)$ es un submódulo propio de $V(\lambda)$, que obviamente es el único máximo. $\mathrm{rad}\, V(\lambda)$.
El cociente $L(\lambda) = V(\lambda) / \mathrm{rad}\, V(\lambda)$ es por supuesto simple de peso ~~máximo~~ más alto λ.

Conversamente, por la propiedad universal de $V(\lambda)$, cada repr. simple L' de peso máximo λ es cociente de $V(\lambda)$ $\Rightarrow$ el núcleo de la proyección tiene que ser el único submod. máximo $\mathrm{rad}\, V(\lambda)$ $\square$

Teorema 2 Con la notación del Tma 1, para $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ son equiv.

(a) El módulo simple de ~~peso máximo~~ $L(\lambda)$ más alto λ es de dim finita ($\dim L(\lambda) < \infty$)

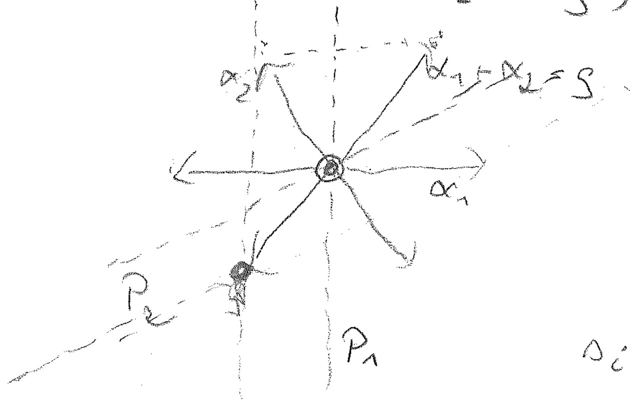
(b) λ es ~~dominante~~ integral y domin. ($\lambda \in \Lambda^+(\Phi, \Delta)$)

Dem: (a) $\Rightarrow$ (b) lo vimos ya

La otra dirección requiere de un poco más de preparación:

Def. Con $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$ definimos la "operación trasladada por $-\rho$" de W / $\mathfrak{h}^*$

$$w\bullet\lambda = w(\lambda+\rho)-\rho \quad = w\lambda + w\rho - \rho$$



$s_i\rho = \rho - \alpha_i$

$$s_i\bullet\lambda = s_i\lambda + \rho - \alpha_i - \rho$$

Lema B Con nuestras convenciones tenemos para cad raíz simple $\alpha\in\Delta$ y $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ con $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ una inyección de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos

$$\Delta(s_\alpha\bullet\lambda)\hookrightarrow\Delta(\lambda)$$

(de hecho, lo mismo vale $\forall\alpha\in\Phi^+$)

$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle\lambda,\alpha\rangle\alpha \quad \sum_{\beta\in\Pi} \omega_\beta$

<u>Dem.</u> ~~$\alpha\in\Delta \Rightarrow \langle\rho,\alpha\rangle = 1$~~

~~$s_\alpha \cdot \lambda = (\lambda+\rho) - \overbrace{\langle(\lambda+\rho),\alpha\rangle}^{\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\alpha - \rho$~~

~~$\leq \sum_{\beta\in\Delta}\omega_\beta$~~

Para $\alpha\in\Delta$ tenemos $\langle\rho,\alpha\rangle = 1$.

Por eso

(1) $$s_\alpha\cdot\lambda = (\lambda+\rho) - \langle\lambda+\rho,\alpha\rangle\alpha - \rho$$
$$= \lambda - (\langle\lambda,\alpha\rangle + \underbrace{\langle\rho,\alpha\rangle}_{=1 \text{ para } \alpha\in\Delta})\alpha$$

$$< \lambda$$

$$\Leftrightarrow \langle\lambda,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

(2) Sea por el momento $\alpha\in\Phi^+$ con $\langle\lambda,\alpha\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Entonces, para $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$

entonces $x_\alpha y_\alpha^{n+1} v_\lambda = 0$.

De hecho los $y_\alpha^i v_\lambda$ $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

forman una base para el módulo de Verma para $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$
$= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^\alpha$

con vector de peso más alto v_λ

y $h_\alpha \cdot v_\lambda = \underbrace{\langle\lambda,\alpha\rangle}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}} v_\lambda$

Ahora $V_{\mathbb{R}_2}(\langle\lambda,\alpha\rangle) \twoheadrightarrow \underbrace{L_{\mathbb{R}_2}(\langle\lambda,\alpha\rangle)}_{\dim\, n+1}$

$\bigoplus_{i>n} y_\alpha^i v_\lambda$ submod $\Longrightarrow$ $\Rightarrow x_\alpha y_\alpha^i v_\lambda = 0$ por peso

Si además $\alpha \in \Delta$ entonces

$x_\beta y_\alpha^i v_\lambda = 0 \quad \forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$

ya que $i\alpha - \beta \notin \Gamma^+$

Por otro lado, ya vimos que

$s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - (n+1)\alpha$

$\Longrightarrow 0 \neq y_\alpha^{n+1} v_\lambda \in V(\lambda)_{s_\alpha \cdot \lambda}$

propiedad univ de $V(s_\alpha \cdot \lambda)$ $\Rightarrow \exists$

$V(s_\alpha \cdot \lambda) \longrightarrow V(\lambda)$

$v_{s_\alpha \cdot \lambda} \longmapsto y_\alpha^{n+1} v_\lambda \neq 0$

Como todos los modulos de Verma son libres de rango 1 sobre el anillo $U(\mathfrak{n}_-)$ (que no tiene divis. de 0)

ese hom. es inyectivo (mult por $x \in U(\mathfrak{n}_-)$)