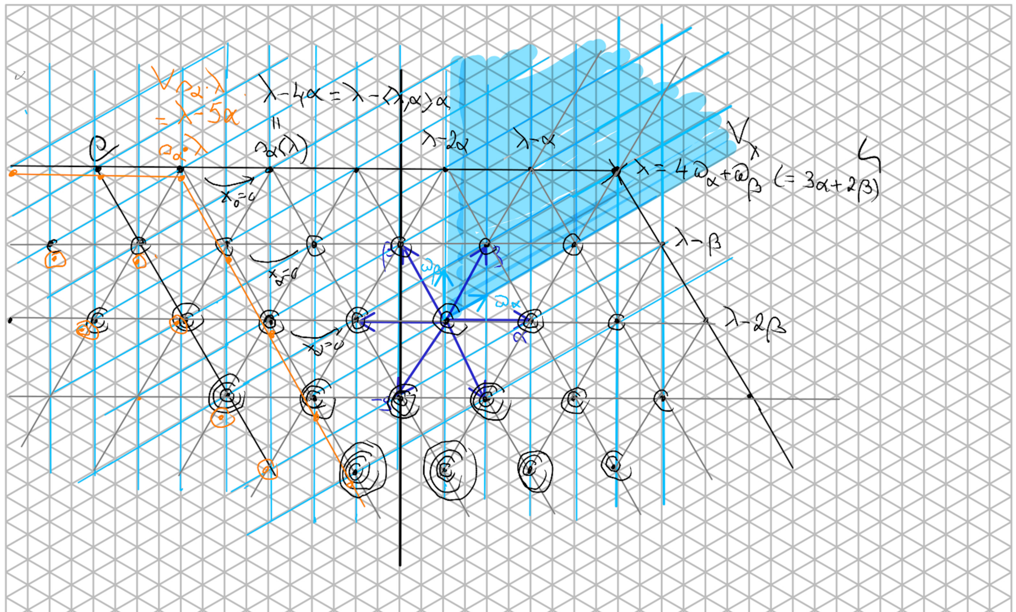
Rec <u>Lema B</u> para $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $\alpha \in \Delta$

tenemos $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow V(r_\alpha \cdot \lambda) \hookrightarrow V(\lambda)$$

<u>Obs.</u> $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow r_\alpha \cdot \lambda \underset{+}{\leq} \lambda$



$V_{\rho_\alpha \cdot \lambda}$
$= \lambda - 5\alpha$
$\rho_\alpha \cdot \lambda$
$\lambda - 4\alpha = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$
$=$
$\sigma_\alpha(\lambda)$
$\lambda - 2\alpha$
$\lambda - \alpha$
V_λ
$\lambda = 4\varpi_\alpha + \varpi_\beta$ $(= 3\alpha + 2\beta)$
$x_0 = 0$
$x_0 = 0$
$x_0 = 0$
$\lambda - \beta$
$\lambda - 2\beta$
ϖ_β
ϖ_α
β
α

Dem de (b) $\Rightarrow$ (a) del Tma 2

Tenemos que demostrar:

$$\lambda \in \Lambda^+ \Rightarrow L(\lambda) := V(\lambda)/\mathrm{rad}(V(\lambda))$$

es de dimensión finita.

Por el Lema B tenemos en este caso

$$\begin{tikzcd}
V(\lambda) \arrow[r] \arrow[dr] & V(\lambda)/V(s_\alpha \cdot \lambda) \arrow[d, dashed] \\
 & L(\lambda)
\end{tikzcd}$$

$\left(V(s_\alpha \cdot \lambda) \subseteq \mathrm{rad}\, V(\lambda) \right)$

$v_\lambda + V(s_\alpha \cdot \lambda))$ genera una

$\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-subrep. de dim. finita

y por el diagrama, lo mismo

para en el cociente $L(\lambda)$.

Por otro lado para cada rep. M de

$\mathfrak{g}$ la suma de todas las $\mathfrak{g}^\alpha$-subrep.

de dim. finita de M es una $\mathfrak{g}$-subrep.

de M (!)

(usar rel. de Serre)

En nuestro caso concluimos

$$\underset{\text{simple}}{L(\lambda)} = \underbrace{\sum \mathfrak{g}^{\alpha}\text{-subesp. de dim fin de } L(\lambda)}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow n_\alpha(\Pi(L(\lambda))) = \Pi(L(\lambda))$$

Eso es válido $\forall\, \alpha \in \Delta$

$$\Rightarrow W(\Pi(L(\lambda))) = \Pi(L(\lambda))$$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} \Pi(L(\lambda)) \text{ es finito}$$

$$\Rightarrow \dim L(\lambda) < \infty$$

ya que $\dim L(\lambda)_\mu \leq \dim V(\lambda)_\mu < \infty$ $\forall\, \mu$.

Sea $\Pi \subset \Lambda$ estable bajo $\mathcal{W}$

y $\mu \leq \lambda$ $\forall \mu \in \Pi$ para $\lambda \in \Lambda^+$ $\Longrightarrow$ Π finito

<u>Dem</u> $\Pi = \bigcup_{\mu \in \Pi \cap \Lambda^+} \mathcal{W}\mu$

$\Rightarrow$ suficiente demostrar que

$\Pi \cap \Lambda^+$ es finita

$$\mu < \lambda \Longrightarrow \begin{cases} \lambda - \mu \in \Gamma^+ \\ \lambda + \mu \in \Lambda^+ \end{cases} \qquad (\mu \in \Pi \cap \Lambda^+)$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu, \lambda-\mu) \geq 0$$

$$= (\lambda,\lambda) - (\mu,\mu)$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\mu,\mu) \leq (\lambda,\lambda)$$

$$\mu \in \Lambda^+ \text{ discrete}$$

$\Rightarrow$ finite

$(\mu \in \mathbb{Q}\Phi)$

$\square$

5.4. Las fórmulas de Weyl

5.4.1 Para el resto del capítulo fijamos la siguiente notación

$\mathfrak{g}$ álg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$

$\cup$

$\mathfrak{h}$ subálg. de Cartan

$\Phi = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ sist. de raíces

$\cup$

Δ base $\rightsquigarrow$ $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$

$$\Gamma \subset \Lambda \subset \mathfrak{h}^*$$

pesos integrales: $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Phi\}$

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \subset & \Lambda \\
\uparrow & & \| \\
\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha & & \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\omega_\alpha \\
\cup & & \cup \\
\Gamma^+ & & \Lambda^+ \\
\| & & \| \\
\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha & & \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_\alpha
\end{array}$$

Nota

Teorema (Weyl) Para cada peso integral, dominante $\lambda \in \Lambda^+$ tenemos

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \rho, \alpha \rangle}$$

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\rho}}$$

$$\in \mathbb{Z}[\Lambda] \cong \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_\ell^{\pm}]$$

tiene una base $(e^{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ con

$$e^{\lambda} \cdot e^{\mu} := e^{\lambda+\mu}$$

por def

$$ch(L(\lambda)) = \sum_{\mu \leq \lambda} (\dim L(\lambda)_{\mu})\, e^{\mu}$$

<u>Ejemplos</u> · $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$\lambda = n\rho = n\omega$ con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\Phi^+ = \{\alpha\}$ $\quad W = \langle s_\alpha \rangle = \{e, s_\alpha\}$

$$\dim L(n\rho) = \frac{\langle n\rho+\rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle} = \frac{n+1}{1} \checkmark$$

$$\operatorname{ch} L(n\rho) = \frac{e^{(n+1)\rho} - e^{-(n+1)\rho}}{e^{\rho} - e^{-\rho}}$$

$$= e^{n\rho} + e^{(n-2)\rho} + \dots + e^{-n\rho}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\}$$

$$\lambda = \ell_1 \varpi_1 + \ell_2 \varpi_2 \quad \text{con } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

tenemos por def. $\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \rho, \alpha \rangle} =$$

$$\frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle (\ell_1+1)\omega_1 + (\ell_2+1)\cdot\omega_2, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \omega_1 + \omega_2, \alpha \rangle}$$

$$\overset{(!)}{=} \frac{(\ell_1+1)(\ell_2+1)(\ell_1+\ell_2+2)}{1 \cdot 1 \cdot 2}$$

5.4.2 Anillo de caracteres extendido

Queremos expresar $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ en términos de los $\mathrm{ch}(V(w\bullet\lambda))$

$w \in W$

por eso necesitamos trabajar en un anillo más grande.

Obs. $\mathbb{Z}[\Lambda] \subset \mathrm{Conj}(\Lambda, \mathbb{Z})$

mapeos (de conjuntos) de Λ a $\mathbb{Z}$

mult $(f * g)(\lambda) := \sum_{\lambda' + \lambda'' = \lambda} f(\lambda')\, g(\lambda'')$

(Tiene problemas en $\mathrm{Conj}(\Lambda, \mathbb{Z})$)

Pero: $\mathrm{Conj}(\mathfrak{g}^*, \mathbb{Z})$ no tiene estructura de anillo

Definimos

$$\mathbb{Z}\rceil \mathfrak{g}^* = \left\{ f \in \mathrm{Conj}(\mathfrak{g}^*, \mathbb{Z}) \;\middle|\; \mathrm{sop}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{d(f)} (\lambda_i - \Gamma^+) \right\}$$

Obs. $\cdot\ ch\, V(\lambda) \in \mathbb{Z}\rceil \mathfrak{g}^* \quad \forall \lambda \in \mathfrak{g}^*$

$\cdot$ sumas de $ch\, V(\lambda)$'s ✓

$$\mathbb{Z}\Lambda \subset \mathbb{Z}\rceil \mathfrak{g}^*$$

• en $\mathbb{Z}^{7}\mathfrak{g}^*$ el producto de convolución $*$ está definido porque solamente involucra sumas finitas (!)

$$\operatorname{ch} V(\lambda) = \sum_{\mu \in \Gamma^+} \mathcal{P}(\mu) e^{\lambda - \mu} \in \mathbb{Z}^{7}\mathfrak{g}^*$$

$$\operatorname{sup}\left(\operatorname{ch}(V(\lambda))\right) = \lambda - \Gamma^+$$

<u>**Lema**</u> Sean M, N repr. de $\mathfrak{g}$ con $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} M_\lambda$, $N = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{g}^*} M_\mu$

con $ch(M), ch(N) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{g}^*]$

entonces

$$ch(M \otimes N) = ch(M) \cdot ch(N) \quad !$$