Tarea 6

Ejercicio 22
Sea $\Phi \subset E$ un sistema de raíces. Recuerda que para $\alpha \in \Phi$ definimos $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Demuestra:

(a) $\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ para $\alpha, \beta \in \Phi$.

(b) $\Phi^\vee$ es un sistema de raíces cuyo grupo de Weyl es naturalmente isomorfo al grupo de Weyl de Φ.

(c) Si Δ es una base de Φ, entonces $\Delta^\vee$ es una base del sistema dual $\Phi^\vee$.

(d) Si Φ es irreducible, también $\Phi^\vee$ lo es. Si en este caso Φ tiene raíces de dos longitudes differents, lo mísmo sucede para $\Phi^\vee$, pero si α es largo, $\alpha^\vee$ es corto.

Dibuja los sistemas de raíces de tipo B_2 y G_2 respectivamente, junto con el sistema dual correspondiente. Para esto se supone que la raíz corta es de longitud 1.

Ejercicio 23
Clasifica los sistemas de raíces de rango 2 salvo isomorfismo. Identifica en cada caso el grupo de Weyl correspondiente. Utiliza para esto solo el material cubierto en las secciones 3.1. – 3.3.

Ejercicio 24

(a) Demuestra que para cualquier base $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ de un espacio euclidiano E, la intersección de los semi-espacios positivos $\cap_{i=1}^r \{\gamma \in E \mid (\gamma, \gamma_i) > 0\}$ no es vacía. *Pista*: Encuentra γ_i' tal que $(\gamma_i, \gamma_j') = \delta_{ij}$.

(b) Sea Δ una base del sistema de raíces Φ con grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Demuestra que para cada $\mu \in E$ existe $\sigma \in \mathcal{W}$ con $\sigma(\mu) \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$, la cerradura de la cámara de Weyl fundamental con respecto a Δ.
Pista: Definimos un orden parcial $\leq$ sobre E con $\gamma \leq \delta$ si $\delta - \gamma \in \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha$. Escoja $\sigma \in \mathcal{W}$ que maximice $\sigma(\mu)$ con respecto a este orden parcial.

Ejercicio 25
Sea Φ un sistema de raíces con grupo de Weyl $\mathcal{W}$ y Δ una base de Φ. Demuestra:

(a) Existe un único elemento $\sigma_0 \in \mathcal{W}$ con $\sigma_0(\Phi^+) = \Phi^-$. Este elemento es el (único) elemento de longitud máxima de $\mathcal{W}$.

(b) Consideramos $\lambda \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}_0 \alpha$. Si λ no es un múltiplo de una raíz, entonces existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que en la expansión $\sigma(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ aparecen simultanemanete coeficientes positivos y negativos. *Pista:* En esta situación encuentra $\mu \in E$ con $0 = (\mu, \lambda) \neq (\mu, \beta)$ para todo $\beta \in \Phi$. Luego encuentra $\sigma \in \mathcal{W}$ con $(\sigma(\mu), \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Fecha de entrega: 22 de Abril de 2022.