Semestre 2022/2 Algebras de Lie y sus Representaciones

Christof Geiss

Tarea 7

Ejercicio 26

Sea $\Phi \subset E$ un sistema de raíces con base Δ. Denotamos con $\mathcal{W}$ su grupo de Weyl. Demuestra:

(a) Las únicas reflexiones en $\mathcal{W}$ son las reflexiones de la forma σ_γ con $\gamma \in \Phi$.

(b) Si $\alpha, \beta \in \Delta$ definimos

$$m(\alpha,\beta) := \begin{cases} 1 & \text{si } \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 4, \\ 6 & \text{si } \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 3, \\ 4 & \text{si } \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 2, \\ 3 & \text{si } \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 1, \\ 2 & \text{si } \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 0, \end{cases}$$

entonces la "rotación" $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ tiene orden $m(\alpha,\beta)$. (Se puede demostrar que $\mathcal{W}$, como grupo abstracto, es definido por las relaciones $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$ para $\alpha, \beta \in \Delta$.)

(c) $\mathcal{W}$ es isomorfo al producto directo de los grupos de Weyl de las componentes irreducibles de Φ.

(d) El grupo de Weyl de un sistema de raíces de tipo A_n es isomorfo al grupo simétrico $\mathfrak{S}_{n+1}$

Ejercicio 27

Utiliza el algoritmo que discutimos en clase para expresar todas las raíces de un sistema de tipo C_3 en términos de una base. Recuerda que la matriz de Cartan en este caso es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 28

Sea Γ un diagrama de Dynkin (conexo) con l vértices y $C \in \mathbb{Z}^{l\times l}$ la matriz de Cartan correspondiente.

(a) Demuestra que todos los menores principales de C son positivos. *Pista:* Verifica primero lo siguientes valores para $\det(C)$: $\mathsf{A}_l : l+1$, $\mathsf{B}_l : 2$, $\mathsf{C}_l : 2$, $\mathsf{D}_l : 4$, $\mathsf{E}_6 : 3$, $\mathsf{E}_7 : 2$, $\mathsf{E}_8 : 1$, $\mathsf{F}_4 : 1$, $\mathsf{G}_2 : 1$.

(b) Verifica que C es simetrizable, i.e. existe una matriz $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_l)$ con los $d_i \in \mathbb{N}_+$ tal que $C \cdot D$ es simétrica. Obviamente podemos suponer $\mathrm{mcd}(d_1, \ldots, d_l) = 1$. Concluya con (a) que $C \cdot D$ es positivamente definida.

(c) Decimos que un diagrama de Dynkin es simplemente amarrado si su matriz de Cartan es simétrica. En este caso consideramos $E := \mathbb{R}^l$ con la base estándar $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ y definimos un forma bilineal vía $(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{1}{2} C_{i,j}$, convertiendo así a E en un espacio euclidiano. Consideramos la retícula $Q := \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i \subset E$. Demuestra que

$$\Phi := \{\beta \in Q \mid (\beta, \beta) = 1\}$$

es un sistema de raíces con base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ de tipo Γ. *Pista:* Considera $\mathcal{W}'$, el grupo generado por las reflexiones σ_{α_i} y Φ', la unión de las $\mathcal{W}'$-orbitas de los α_i. Demuestra primero que Φ' es un sistema de raíces con base $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

Ejercicio 29

Sea $\Phi \subset E$ un sistema de raíces con $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ una base, Φ^+ las raíces positivas y $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ los pesos fundamentales correspondientes, i.e. $(\varpi_i, \alpha_j^\vee) = \langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Recuerda que definimos $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. Demuestra:

(a) $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \varpi_j$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

(b) $\rho = \sum_{i=1}^{r} \varpi_i$, en particular, ρ es un peso integral estrictamente dominante.

(c) Sea $\mu \in X^+ := \{\lambda \in E \mid \langle \mu, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}\ \forall\, i = 1, 2, \cdots, r\}$, es decir un peso integral dominante y $w \in \mathcal{W}$ un elemento del grupo de Weyl de Φ, entonces $w(\lambda) \preceq \lambda$.

(c) En la situación de (c) tenemos $(w(\lambda) + \rho, w(\lambda) + \rho) \leq (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ con igualdad sólo si $w(\lambda) = \lambda$.

Fecha de entrega: 29 de Abril de 2022.