

Tarea 6**Ejercicio 23**

Sea R un anillo conmutativo con $0 \neq 1_R \in R$, y $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Consideramos el anillo de matrices $S := \text{Mat}(n \times n, R)$. Demuestra:

- (a) S es anillo no conmutativo con 1, no libre de divisores de 0.
- (b) Los ideales de S son precisamente de la forma $\text{Mat}(n \times n, I)$ para algún ideal I de R . Pista: Para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $m \in \text{Mat}(n \times n, R) = S$ sea $m_{i,j}$ la componente (i, j) de m . Si $J \subset S$ es un ideal demuestra que $J_{i,j} := \{m_{i,j} \mid m \in J\}$ es un ideal de R , que no depende de i y j .
- (c) Encuentra un ejemplo de un anillo simple (i.e. que no tiene ideales no triviales) que no sea un campo.

Ejercicio 24

- (a) Deduzca del teorema Chino de Residuos (la versión vista en clase) el siguiente resultado: Sean $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$ con $\text{mcd}(z_i, z_j) = 1$ para todo $i \neq j$. Entonces para cualquier $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ existe un $x \in \mathbb{Z}$ con $x \equiv r_i \pmod{z_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Si x' es otra solución, entonces $x - x' \in z_1 z_2 \cdots z_n \mathbb{Z}$.
- (b) Encuentra todos los $x \in \mathbb{Z}$ que cumplan las siguientes 4 congruencias: $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{8}$, $x \equiv 3 \pmod{9}$, $x \equiv 4 \pmod{11}$.

A discutir en la Ayudantía a partir del **13 de Octubre**.