

**Tarea 1****Ejercicio 1**

Sea  $k$  un campo.

- (a) Sea  $\mathfrak{g}$  un  $k$ -álgebra de Lie. Para  $x \in \mathfrak{g}$  consideramos el endomorfismo  $k$ -lineal  $\text{ad}(x)$  de  $\mathfrak{g}$  que está definido por  $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y]$ . Demuestra que el mapeo

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \mapsto \text{ad}(x),$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

- (b) Sea  $A = (A, \cdot)$  un  $k$ -espacio vectorial junto con un mapeo  $k$ -bilineal  $A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$ . Entonces una *derivación* de  $A$  es un mapeo  $k$ -lineal  $\delta: A \rightarrow A$  tal que  $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$  para todo  $a, b \in A$ . Demuestra:  $\text{Der}_k(A) := \{\delta \in \mathfrak{gl}(A) \mid \delta \text{ es derivación de } A\}$  es un subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(A)$ .

**Ejercicio 2**

Demuestra:

- (a) Salvo isomorfía solo hay dos álgebras de Lie complejas de dimensión 2.
- (b) Si  $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}$  es una base de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  con  $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$  y  $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$ , entonces  $[\tilde{e}, \tilde{f}] = \mu\tilde{h}$  para algún  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (c) El álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  es simple.

**Ejercicio 3**

Sea  $k$  un campo. Consideramos el mapeo  $k$ -lineal:

$$\rho: \mathfrak{gl}_n(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(k[X_1, X_2, \dots, X_n]), E_{ij} \mapsto X_i \partial_j \text{ para todos } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí, los  $E_{ij}$  forman la bases estándar de  $\mathfrak{gl}_n(k)$ . Demuestra:

- (a)  $\rho$  define una representación de  $\mathfrak{gl}_n(k)$ , y para cada  $d \in \mathbb{N}_0$  los polinomios homogéneos de grado  $d$  forman un sumando directo  $k[X_1, \dots, X_n]_d$  de esta representación.
- (b) En caso  $\text{char}(k) = 0$  ó  $\text{char}(k) > d$ , la representación  $k[X_1, \dots, X_n]_d$  de  $\mathfrak{gl}_n(k)$  es simple.

**Ejercicio 4**

Sea  $k$  un campo con  $\text{char}(k) \neq 2$ . Demuestra:

- (a)  $\dim_k \mathfrak{sp}(2n; k) = 2n^2 + n$ ,
- (b)  $\mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$  como álgebras de Lie.

**Fecha de entrega:** 9 de Febrero de 2024.