

# CURSO AVANZADO DE ÁLGEBRA: ÁLGEBRAS DE LIE Y SUS REPRESENTACIONES

## SEMESTRE 2024/2

CHRISTOF GEISS

Nos enfocaremos en la teoría clásica de álgebras de Lie semisimples sobre los complejos y sus representaciones de dimensión finita. Los prerrequisitos son esencialmente un dominio seguro de álgebra lineal y conocimiento básico de teoría de anillos y de grupos. La referencia principal para este curso es el libro clásico de Humphreys [3].

### 1. TEORÍA GENERAL DE ÁLGEBRAS DE LIE

Definiciones, ejemplos y representaciones de álgebras de Lie; álgebras de Lie nilpotentes y solubles. Teoremas de Engel y de Lie, criterio de Cartan. Álgebras de Lie reductivos y semisimples.

### 2. ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES SOBRE LOS COMPLEJOS

Teorema de Weyl sobre las representaciones de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple; producto tensorial de representaciones; descomposición de Jordan; descomposición en espacios de raíces; conjugación subálgebras de Cartan; Lema de Schur.

### 3. SISTEMAS DE RAÍCES Y GRUPOS DE REFLEXIONES

Reflexiones en el espacio euclidiano; axiomas; el grupo de Weyl y matriz de Cartan. Clasificación vía diagramas de Dynkin; construcción de sistemas de raíces. Teoría de pesos.

### 4. REPRESENTACIONES SIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA

Clasificación por peso máximo, álgebra envolvente universal, construcción de representaciones con peso máximo. Módulos de Verma y formula de carácter de Weyl. Anillo de caracteres.

### 5. CONSTRUCCIÓN DE ÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES

Álgebras de Lie libres y presentación de álgebras de Lie simples vía las relaciones de Serre.

## REFERENCES

- [1] Bourbaki, N.: *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4–6.*, Masson, 1981
- [2] Kac, V. G.: *Infinite dimensional Lie algebras.* tercera ed., Cambridge University Press, 1990.
- [3] Hotta, R.; Takeuchi, K.; Tanisaki, T.: *D-modules, perverse sheaves, and representation theory.* Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. Progress in Mathematics, 236. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. xii+407 pp.
- [4] Humphreys, James E.: *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Graduate Texts in Mathematics **9** (segunda ed.) Springer, 1978
- [5] Miličić, D.: *Lectures on Lie Groups.* Manuscrito disponible en la página del autor: <http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/lie.pdf>
- [6] Serre, J.-P.: *Complex semisimple Lie algebras.* Translated from the French by G. A. Jones. Springer-Verlag, New York, 1987. x+74 pp.
- [7] Soergel, W.: *Halbeinfache Lie-Algebren* Manuscrito disponible en la página del autor: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLieA.pdf>
- [8] Soergel, W.: *Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren* Manuscrito disponible en la página del autor: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLieD.pdf>
- [9] Soergel, W.: *Spiegelungsguppen und Wurzelsysteme.* Manuscrito disponible en la página del autor: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXSPIEG.pdf>