Terminal IV: Simulación, Semestre 2016-2
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Querétaro
Examen 1

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Septiembre 9, 2016

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 4

TU NOMBRE:

Respuesta

Prob 1 /30	
Prob 2 /30	
Prob 3 /40	
TOTAL /100	

Mucha suerte en su examen!

Terminal IV - Examen 1

Problema 1: Considera el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + e^x u_x &= 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= e^x. \end{cases}$$

(a) Demuestra que esta ecuación diferencial parcial no genera ondas de choque, mostrando que las curvas características no se intersecan.

Curvas características: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$e^{-x} dx = dt$

$\Rightarrow \frac{e^{-x}}{-1} - \frac{e^{-x_0}}{-1} = t \Rightarrow e^{-x} = e^{-x_0} - t \Rightarrow x(t) = -\log(e^{-x_0} - t)$

Si otra solución con condición inicial x_1 se intersecan a tiempo t, entonces: $-\log(e^{-x_0} - t) = -\log(e^{-x_1} - t)$

$\Rightarrow e^{-x_0} - t = e^{-x_1} - t \Rightarrow x_0 = x_1$, pues e^{-x} es inyectiva

(b) Usando el método de las características, encuentra la solución explícita.

Resolver para x_0: $e^{-x_0} = e^{-x} + t$

$\Rightarrow x_0 = -\log(e^{-x} + t)$

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(x_0) = e^{x_0} = e^{-\log(e^{-x}+t)} = \frac{1}{e^{-x} + t}$

Terminal IV - Examen 1

Problema 2: Considera la ecuación del calor con las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 10 \\ u \text{ es periódica en } [0,10] \\ u(x,t=0) = 10 + 2\cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right). \end{cases}$$

Sugerencia: Usa la identidad trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

Aquí: $\varepsilon = 1$, $L = 10$. Soluciones particulares $e^{-\left(\frac{2\pi}{10}k\right)^2 t} e^{\frac{2\pi i}{10}kx}$.

$$2\cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{10}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{10}2x\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{10}2x} - e^{-\frac{2\pi i}{10}2x}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 10 + \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{10}2x} - e^{-\frac{2\pi i}{10}2x}\right)e^{-\left(\frac{2\pi}{10}2\right)^2 t}$$

$$= 10 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{5}\right)e^{-\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 t}.$$

Terminal IV - Examen 1

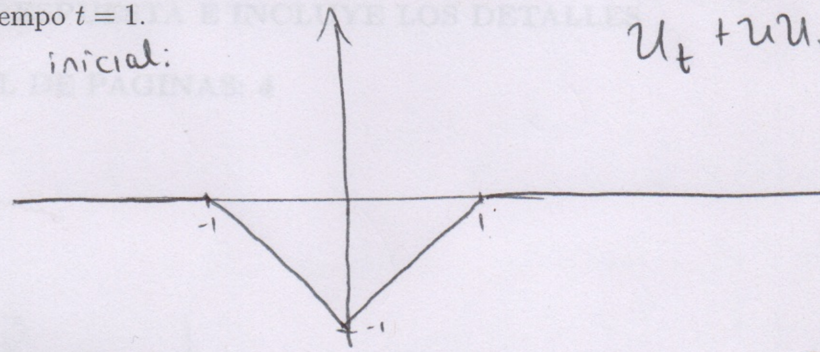
Problema 3: Considera la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \le -1 \\ -1-x & \text{if} \quad -1 < x \le 0 \\ -1+x, & \text{if} \quad 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{if} \quad 1 < x. \end{cases} \end{cases}$$

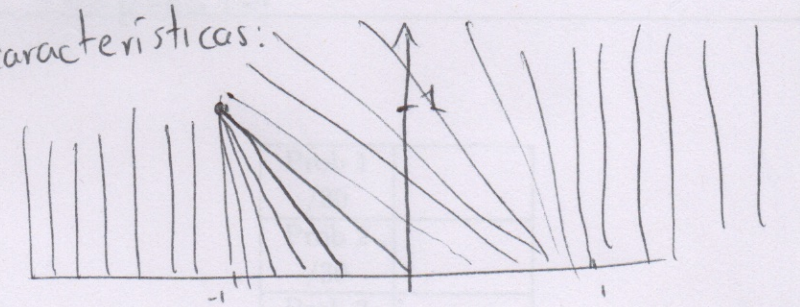
a) Dibuja la condición inicial, y las curvas características. Demuestra que se intersecan por primera vez a tiempo $t = 1$.

Condición inicial:

$u_t + uu_x = 0$



Curvas características:



Para $-1 \le x_0 \le 1$

$x(t) = x_0 + (-1-x_0)t$

$x(1) = x_0 - 1 - x_0 = -1$

Se interseca con $x_{-1}(t) = -1$. a tiempo $t = 1$.

b) Encuentra la solución.

Las curvas características son:

Caso 1: $x_0 \le -1$ ó $x_0 \ge 1$ $\quad x(t) = x_0$

Caso 2: $-1 \le x_0 \le 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + u_0(x_0)t = x_0 + (-1 - x_0)t$

$\Rightarrow u_0(x_0) = -1 - \frac{x+t}{1-t} = \frac{-1+t-x-t}{1-t}$

$x(t) = (1-t)x_0 - t$

Resuelve para x_0: $\quad x_0 = \frac{x+t}{1-t} \qquad 0 \le t < 1$.

Caso 3: $0 \le x_0 \le 1 \Rightarrow x(t) = x_0 + (-1+x_0)t = (1+t)x_0 - t$

$\Rightarrow x_0 = \frac{x+t}{1+t}$

$u_0(x_0) = -1 + \frac{x+t}{1+t} = \frac{-1-t+x+t}{1+t}$

Por lo tanto:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -1, \ 0 \le t < 1 \\ -\frac{1+x}{1-t} & \text{si} \quad -1 < x \le 0, \ 0 \le t \le 1 \\ \frac{-1+x}{1+t} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1, \ 0 \le t < 1 \end{cases}$$