Terminal IV: Simulación, Semestre 2016-2
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Querétaro
Examen 2

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Octubre 13, 2016

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 4

TU NOMBRE:

Respuestas

Prob 1 /30	
Prob 2 /30	
Prob 3 /40	
TOTAL /100	

Mucha suerte en su examen!

Terminal IV - Examen 2

Problema 1: Considera el siguiente problema de valor inicial para la ecuación de Burgers viscosa no lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) = u_{xx}, 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = 4\pi \tan(2\pi x) \\ u \quad \text{es periódica en el intervalo } [0,1] \end{cases}$$

Es decir, el dominio tiene tamaño $L = 1$ y el coeficiente de difusión es $\epsilon = 1$. Encuentra la solución exacta.

Sugerencia: Usa la transformada de Cole-Hopf

$$\varphi(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}\int_{x_o}^{x} u(s,t)ds\right)$$

cuya inversa es $u = -2\epsilon\varphi_x/\varphi$.

Recuerda: La anti-derivada de $\tan(x)$ es $-\ln(|\cos(x)|)$.

Usando $\varphi(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0}^{x} u(s,t)ds\right)$, tenemos:

$\varphi_t = \varepsilon \varphi_{xx}$.

Además, $\varphi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0}^{x} 4\pi \tan(2\pi s)ds\right)$ con cambio de vars: $\tilde{s} = 2\pi s$

$\varepsilon = 1$ $\quad = \exp\left(-\frac{2}{2\varepsilon}\int_{x_0 2\pi}^{x 2\pi} \tan(\tilde{s})d\tilde{s}\right)$

$= \exp\left(+\ln(|\cos(x)|)\Big|_{x_0 2\pi}^{x 2\pi}\right) = |\cos(2\pi x)|$ Si x_0 es tal que $\cos(2\pi x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Quitando el valor ~~ab~~ absoluto, $\varphi_0 = \cos(2\pi x)$ también tenemos $u = -2\varepsilon\varphi_x/\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_t = \varphi_{xx} \\ \varphi(x,0) = \cos(2\pi x) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,t) = \cos(2\pi x) e^{-(2\pi)^2 t}$$

$$\Rightarrow u = -2\varepsilon \varphi_x/\varphi = -2 \frac{-\operatorname{sen}(2\pi x) 2\pi e^{-(2\pi)^2 t}}{\cos(2\pi x) e^{-(2\pi)^2 t}} = 4\pi \tan(2\pi x)$$

Es decir, la solución no depende de t.

Terminal IV - Examen 1

Problema 2: Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) & = & \epsilon u_{xx}, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) & = & \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \leq 0 \\ -1 & \text{if} \quad x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

cuya approximación viscosa es

$$u(x,t,\epsilon) = \cancel{1} - \tanh\left(\frac{x-t}{2\epsilon}\right).$$

Encuentra el limite $\lim_{\epsilon \to 0} u(x,t)$ cuando la viscosidad se va a cero y comenta sobre la solución. Como evoluciona la solución con el tiempo?

Sabemos que $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Como $e^x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$, $e^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$, $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, $e^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$

$\Rightarrow \tanh(x) \cancel{\xrightarrow[x\to\infty]{}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

$\tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

Si $x - t < 0$ ~~fijo~~ fijo $\Rightarrow \dfrac{x-t}{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\infty$

$\Rightarrow u(x,t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 1$ si $x < t$

Si $x - t > 0$ fijo $\Rightarrow \dfrac{x-t}{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$

$\Rightarrow u(x,t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -1$ si $x - t > 0$

$\therefore \begin{cases} u(x,t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 1 & \text{si } x < t \\ u(x,t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -1 & \text{si } x > t \end{cases}$

La discontinuidad se propaga con el tiempo hacia la derecha.

Problema 3: Escribe un código numérico para resolver el siguiente problema usando la transformada Cole-Hopf. Toma en cuenta las condiciones de frontera.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) & = \quad \epsilon u_{xx}, 0 \leq x \leq L \\ u(x,0) & = \quad u_o(x) \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0. & \quad \text{Condición de frontera Dirichlet} \end{cases}$$

$N=100;\quad L=\ldots;\quad \Delta x = \frac{L}{N};\quad T_{final}=\ldots;$

$u^n = \text{zeros}(N+1,1);\quad u^{n+1} = u^n;$

$x = \text{zeros}(N+1,1);$

for $j=0:N$

$\quad x_j = j\,\Delta x;\qquad u^n(j+1,1) = u_0(x_j);$

$\quad x(j+1,1) = x_j;$

end

$t=0;\quad CFL=0.45;\quad \Delta t = CFL\,\Delta x^2/\varepsilon;$

while $t<T$

$\quad$ for $j=2:N-1$

$$u^{n+1}(j+1,1) = u^n(j+1,1) + \Delta t \cdot \left[\varepsilon \frac{u^n(j+2,1) - 2u^n(j+1,1) + u^n(j,1)}{\Delta x^2} - \frac{1}{2}\frac{u^n(j+2,1)^2 - u^n(j,1)^2}{2\Delta x}\right]$$

$\quad$ end

$\quad u^{n+1}(1,1) = 0;$

$\quad u^{n+1}(N+1,1) = 0;$

end

$u^n = u^{n+1};$

$t = t+\Delta t;$

end