**Terminal IV: Simulación, Semestre 2016-2**
**Licenciatura en Matemáticas Aplicadas**
**Universidad Autónoma de Querétaro**
**Examen 3**

**Profesor: Gerardo Hernández Dueñas**

**November 25, 2016**

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

**NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 3**

**TU NOMBRE:**

Respuestas

| | |
|---|---|
| Prob 1 /50 | |
| Prob 2 /50 | |
| TOTAL /100 | |

**Mucha suerte en su examen!**

Terminal IV - Examen 3

**Problema 1:** Encuentra la solución débil para el problema de Riemann de la siguiente ley de conservación escalar.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^4) = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} u_\ell & \text{if} \quad x < 0 \\ u_r & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Encuentra las condiciones para la formación de una onda de choque y una onda de rarefacción y encuentras las soluciones exactas.

Forma cuasi-lineal $u_t + 4u^3 u_x = 0$.

El flujo $f(u) = u^4$ es una función convexa.

Caso 1: Si $4u_\ell^3 > 4u_r^3 \iff u_\ell > u_r$ entonces tenemos una onda de choque.

Velocidad de onda de choque: (Rankine-Hugonrot)

$$s = \frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{u_r^4 - u_\ell^4}{u_r - u_\ell} = \frac{(u_r^2 - u_\ell^2)(u_r^2 + u_\ell^2)}{u_r - u_\ell} = (u_r + u_\ell)(u_r^2 + u_\ell^2)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{si} \quad x < st \\ u_r & \text{si} \quad x \geq st. \end{cases}$$

Caso 2: $4u_\ell^3 \leq 4u_r^3 \iff u_\ell \leq u_r$ entonces tenemos una onda de rarefacción.

Busquemos soluciones de la forma $u = a(x/t) = a(\xi)$, $\xi = x/t$.

$\Rightarrow f'(a(\xi)) = \xi \Rightarrow 4a^3 = \xi \Rightarrow a = (\xi/4)^{1/3}$.

La solución en ese caso es:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{si} \quad x/t \leq \xi_\ell, \quad \xi_\ell = 4u_\ell^3 \\ \sqrt[3]{x/(4t)} & \text{si} \quad \xi_\ell \leq x/t \leq \xi_r, \quad \xi_r = 4u_r^3 \\ u_r & \text{si} \quad x/t > \xi_r. \end{cases}$$

Terminal IV - Examen 3

**Problema 2:** La ecuación de Burgers $u_t + \partial_x(u^2/2) = 0$ se puede re-escribir como $\partial_t(u^2) + (2/3)\partial_x(u^3) = 0$. Definiendo $w = u^2$ obtenemos $w_t + (2/3)\partial_x(w^{3/2}) = 0$. Encuentra la solución débil para el problema de Riemann de la siguiente ley de conservación escalar.

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x\left(\frac{2}{3}w^{3/2}\right) = 0, & -\infty < x < \infty \\ w(x,0) = \begin{cases} w_\ell & \text{if } x < 0 \\ w_r & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Encuentra las condiciones para la formación de una onda de choque y una onda de rarefacción y encuentras las soluciones exactas.

Aquí la variable es: $\omega$, y el flujo $f(\omega) = \frac{2}{3}\omega^{3/2}$

Dada la naturaleza del problema, se asume $\omega \geq 0$. $(\omega = u^2)$

La función $f(\omega)$ es convexa.

Caso 1: $\frac{2}{3}\omega_\ell^{3/2} > \frac{2}{3}\omega_r^{3/2} \iff \omega_\ell > \omega_r$ entonces tenemos una onda de choque.

Velocidad de la onda de choque: (Rankine-Hugoniot)

$$S = \frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{\frac{2}{3}(\omega_r^{3/2} - \omega_\ell^{3/2})}{\omega_r - \omega_\ell} = \frac{2}{3}\frac{\left((\sqrt{\omega_r})^3 - (\sqrt{\omega_\ell})^3\right)}{\omega_r - \omega_\ell} = \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{\omega_r} - \sqrt{\omega_\ell})}{\omega_r - \omega_\ell}\left((\sqrt{\omega_r})^2 + \sqrt{\omega_r}\sqrt{\omega_\ell} + (\sqrt{\omega_\ell})^2\right)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{\omega_r} - \sqrt{\omega_\ell})}{(\sqrt{\omega_r} - \sqrt{\omega_\ell})(\sqrt{\omega_r} + \sqrt{\omega_\ell})}\left(\omega_r + \sqrt{\omega_r\omega_\ell} + \omega_\ell\right) = \frac{2}{3}\frac{\omega_r + \sqrt{\omega_\ell\omega_r} + \omega_\ell}{\sqrt{\omega_r} + \sqrt{\omega_\ell}}.$$

$$w(x,t) = \begin{cases} \omega_\ell & \text{si } x \leq St \\ \omega_r & \text{si } x > St. \end{cases}$$

Notar que la velocidad de la onda de choque aquí es distinta a la de Burgers.

Caso 2: $\frac{2}{3}\omega_\ell^{3/2} \leq \frac{2}{3}\omega_r^{3/2} \iff \omega_\ell \leq \omega_r$ entonces tenemos una onda de rarefacción.

Buscamos soluciones de la forma $\omega(x,t) = a(x/t)$.

$f'(\omega) = \omega^{1/2} \Rightarrow a(\xi)^{1/2} = \xi \Rightarrow a(\xi) = \xi^2$

$$\Rightarrow \omega(x,t) = \begin{cases} \omega_\ell & \text{si } x/t \leq \xi_\ell = \omega_\ell^{1/2} \\ (x/t)^2 & \text{si } \omega_\ell^{1/2} \leq x/t \leq \omega_r^{1/2} = \xi_r \\ \omega_r & \text{si } x/t \geq \omega_r^{1/2}. \end{cases}$$