10824.1
2016

Tarea 1

Problema: Considera la ecuación hiperbólica escalar

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

conocida como la ecuación de Burgers.

a) Usa el método de las características para resolver la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:

$$u(x,t=0) = \operatorname{sign}(x)\, x^2 = \begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$$

y encuentra la fórmula explícita de la solución.

R: Curvas características:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x(t),t) = u_0(x_0) & x(t) = x_0 + u_0(x_0)\,t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Caso 1: $x_0 < 0$ $x(t) = x_0 - x_0^2 t$

Resolver para x_0: $t x_0^2 - x_0 + x = 0$

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot t\cdot x}}{2t}$$

Como $x_0 < 0$, necesitamos $x_0 = \dfrac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}$

$$1-\sqrt{1-4xt} \le 0 \iff 1-4xt \geq 1 \iff x \geq 0.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -x_0^2 = -\left(\frac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}\right)^2 \quad \text{si} \quad t \geq 0,\ x \geq 0.$$

Caso 2: $x_0 > 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 + x_0^2 t$

Resolver para x_0: $t x_0^2 + x_0 - x = 0$

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4t(-x}}{2t}$$

Como $x_0 > 0$, necesitamos $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4xt}}{2t}$

$-1+\sqrt{1+4xt} \geq 0 \Leftarrow$ ~~[illegible]~~ $1+4xt \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

(asumiento $t>0$)

La solución explícita es entonces:

$$u(x,t)=\begin{cases} -\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}\right)^2 & \text{si } x\leq 0,\ t\geq 0 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{1+4xt}}{2t}\right)^2 & \text{si } x\geq 0,\ t\geq 0 \end{cases}$$

$$= \operatorname{sign}(x)\left(\frac{1-\sqrt{1+4|x|t}}{2t}\right)^2.$$

(b) Considera ahora la condición inicial $u(x,t=0)=x^2$.

¿Puedes encontrar la solución para todo tiempo t? Encuéntrala

La curva característica debe ser:

$$X(t)=x_0+x_0^2 t \Rightarrow t x_0^2 + x_0 - X = 0$$

$$x_0 = \frac{-1\pm\sqrt{1-4t(-x)}}{2t} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4xt}}{2t} \quad \text{y } u(x,t)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4xt}}{2t}\right)^2$$

dependiendo del signo $\pm$.

Primero que nada, necesitamos $1+4xt\geq 0$

Si $x\geq 0$, no hay problema.

Si $x<0$, $\Rightarrow t \leq \frac{1}{4|x|}$

$\frac{1}{|x|}$ puede ser arbitrariamente pequeño.

Siempre tendremos problemas teóricos en esos casos.