0830.1
2016

Tarea 2:

Problema 1: Usando el método de las características, resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - x^3 u_x = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x, t=0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde $u_0(x)$ es una función suave. Demuestra que esta ecuación diferencial parcial no genera ondas de choque, mostrando que las curvas características no se intersectan.

Respuesta: Curvas características:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \Rightarrow x^{-3}dx = -dt \Rightarrow \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x_0^{-2}}{-2} = -t$$

$$\Rightarrow x^{-2} = x_0^{-2} + 2t \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x_0^{-2}+2t} \Rightarrow x = \operatorname{sign}(x_0)\frac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sign}(x_0)\dfrac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Considera otra curva $y(t) = \operatorname{sign}(x_1)\dfrac{1}{\sqrt{x_1^{-2}+2t}}$ para otra condición inicial

Si $x(t_0) = y(t_0)$ para algún $t_0 > 0$ fijo

$\Rightarrow$ tendrían que ser del mismo signo

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^{-2}+2t_0}} \Rightarrow x_0^{-2} = x_1^{-2} \Rightarrow x_0 = x_1$$

Podemos incluso despejar x_0: $x_0^{-2} = x^{-2} - 2t$

$$x_0 = \operatorname{sign}(x)\frac{1}{\sqrt{x^{-2}-2t}} \quad \text{para} \quad t < \frac{1}{2x^2}.$$

Para $x \neq 0$, $t > \frac{1}{2x^2}$ no hay curva característica que toque ese punto $\Rightarrow u(x,t) = u_0\left(\operatorname{sign}(x)\dfrac{1}{\sqrt{x^{-2}-2t}}\right)$ para $t < \dfrac{1}{2x^2}$.

Además, notamos que

$$\lim_{t \to \frac{1}{2x^2}} u(x,t) = \begin{cases} u_0(+\infty) & \text{si} \quad x>0 \\ u_0(-\infty) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Si u_0 decae: $u_0(+\infty) = u_0(-\infty) = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} u_0\left(\text{sign}(x)\dfrac{1}{\sqrt{x_0^{-2}-2t}}\right) & t < \dfrac{1}{2x^2} \\ 0 & t \geq \dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$$

<u>Problema 2</u>: Considera ahora la ecuación de Burgers no lineal

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 , & -\infty < x < \infty \\ u(x,t=0) = u_0(x) \end{cases}$$

donde $u_0(x)$ es una función suave con derivada negativa en al menos un punto, y $\min_x u_0'(x) < 0$ (finito). Demuestra que las curvas caracteristicas se intersectan por primera vez a tiempo $t = \dfrac{-1}{\min_x u_0'(x)}$.

<u>Respuesta:</u> Sabemos que las curvas son $x(t) = x_0 + u_0(x_0)t$

Para otra curva con condición inicial x_1: $y(t) = x_1 + u_0(x_1)t$, $x_1 \neq x_0$

ésta se intersecta con $x(t)$ a tiempo t_{x_0,x_1} si:

$$x_0 + u_0(x_0)\, t_{x_0x_1} = x_1 + u_0(x_1)\, t_{x_0,x_1} \Leftrightarrow t_{x_0,x_1} = -\frac{1}{\dfrac{u_0(x_1) - u_0(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

si $\dfrac{u_0(x_1)-u_0(x_0)}{x_1-x_0}$ es negativo.

Sabemos de cálculo que $\dfrac{u_0(x_1)-u_0(x_0)}{x_1-x_0} = u_0'(x_m)$ para algún x_m entre x_0 y x_1

y $\displaystyle\lim_{x_1 \to x_0} \frac{u_0(x_1)-u_0(x_0)}{x_1-x_0} = u_0'(x_0)$.

$$\min_{x_0 \neq x_1} t_{x_0,x_1} = -\max_{x_0 \neq x_1} \frac{1}{\dfrac{u_0(x_1)-u_0(x_0)}{x_1-x_0}} = -\frac{1}{\displaystyle\min_{x_0,x_1} \frac{u_0(x_1)-u_0(x_0)}{x_1-x_0}} = -\frac{1}{\min_x u_0'(x)}.$$

$\therefore$ $t = \dfrac{-1}{\min_x u_0'(x)}$ es el tiempo en que las curvas se intersectan por primera vez.