0906.1
2016

Tarea 3:

Problema: Resuelve la ecuación del calor con las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \\ u \text{ es periódica en } [0,3] \\ u(x, t=0) = 1 + \cos(2\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x/3). \end{cases}$$

Respuesta:

Ya vimos en clase soluciones particulares $e^{-\varepsilon\left(\frac{2\pi}{L}k\right)^2 t} e^{\frac{2\pi i k x}{L}}$ donde $L = 3$ aquí.

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}x\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}x} - e^{-\frac{2\pi i}{3}x}\right)$$

$$\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}3x} + e^{-\frac{2\pi i}{3}3x}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-\varepsilon \cdot 0 t} \cdot 1 - \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}x} - e^{-\frac{2\pi i}{3}x}\right) e^{-\varepsilon\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 t}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}3x} + e^{-\frac{2\pi}{3}i\,3x}\right) e^{-\varepsilon\left(\frac{2\pi}{3}3\right)^2 t}$$

$$= 1 + \cos(2\pi x)\, e^{-\varepsilon(2\pi)^2 t} - \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}x\right) e^{-\varepsilon(2\pi/3)^2 t}$$

$$\boxed{\therefore\ u(x,t) = 1 + \cos(2\pi x)\, e^{-2\pi^2 t} - \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi x}{3}\right) e^{-2\pi^2/9\ t}}$$