TERMINAL IV: SIMULACIÓN
SEMESTRE 2016-2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
RESPUESTA A TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes 27 de Septiembre de 2016
Durante los 10 minutos al inicio de la clase 100%
Después de clase y hasta la media noche de ese día 80%

Problema: Resuelve numéricamente la ecuación del calor con las siguientes condiciones iniciales y de frontera.

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u \text{ es periódica en } [0,1], \\ u(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ x - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ x - \frac{3}{4} & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{cases} \tag{0.0.1}$$

- Resuélvelo con el método en diferencias finitas visto en clase, y compáralo usando la serie de Fourier en el código adjunto.
- Usa un enmallado con 200 puntos. Grafica las dos soluciones. En una figura por separado, grafica la diferencia entre las dos soluciones.
- Explica cual es el efecto que observas sobre la solución? En donde cambia más? **Nota:** Esta explicación vale 20 puntos.

Respuesta:

El código está adjunto. Los resultados a tiempo $t = 10^{-4}$ está en la figura 1. La solución obtenida con los modos de Fourier se puede considerar como la solución de referencia, con la cual comparar. La solución obtenida con diferencias finitas se observa muy cercana a la solución de referencia. El error (la diferencia entre las dos soluciones) es menor a 10^{-2}. El error relativo se puede obtener como el error dividido entre el máximo de la solución. El error relativo en este caso es menor al 4% (0.01/0.25).

En relación al efecto en la solución, y como se ha discutido en clase, podemos ver que las discontinuidades en la condición inicial se han "suavizado". Al evolucionar una condición inicial mediante la ecuación del calor, cualquier discontinuidad genera un perfil suave instantáneamente. Recordemos que la solución general para la ecuación del calor se ve como

$$u(x,t) = \sum_n a_n e^{2\pi i}$$

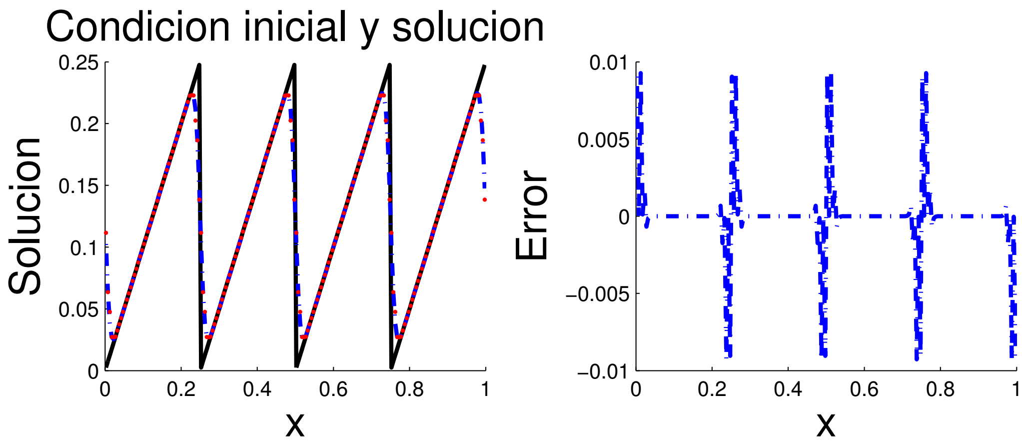

Figure 1. Solución del problema (0.0.1). Línea negra: Condición inicial. Linea azul: Solución obtenida con la descomposición en series de Fourier. Línea roja: Solución numérica con diferencias finitas.

Al descomponer la condición inicial, cualquier discontinuidad se manifiesta con coeficientes de Fourier altos (a_n) para números de onda altos. Éstos decrecen exponencialmente más rápido que los de números de onda más bajos.