TERMINAL IV: SIMULACIÓN
SEMESTRE 2016-2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes 4 de octubre de 2016
Durante los 10 minutos al inicio de la clase 100%
Después de clase y hasta la media noche de ese día 80%

Problema: En el problema 3 del examen 1 consideraste una ecuación de Burgers con condiciones iniciales específicas y demostraste que las curvas características se cruzaban a tiempo $t = 1$. Considera ahora la equivalente ecuación de Burgers viscosa con condiciones Dirichlet:

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2\right) & = \epsilon u_{xx}, & -3 \leq x \leq 3 \\ u(x,0) & = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \leq -1 \\ -1-x & \text{if} \quad -1 < x \leq 0 \\ -1+x, & \text{if} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if} \quad 1 < x. \end{cases} & \\ u(-3,t) = u(3,t) = 0. & \text{Condición de frontera Dirichlet} & \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

Usando la transformada de Cole-Hopf, resuelve el problema anterior. Considera valores de ϵ decrecientes y comenta que observas cuando $\epsilon \to 0$. Específicamente,

(a) Aproxima numéricamente la solución a tiempo $t = 0.5, 1$, y para cada tiempo, considera dos valores del coeficiente de viscosidad $\epsilon = 0.005, 0.02$. Sin viscosidad, las curvas características nos da una solución exacta para tiempos $t \leq 1$ cuando las curvas se intersecan por primera vez, para la condición inicial dada arriba. Para cada tiempo, grafica tanto la solución exacta como la aproximada. **60 puntos**

(b) La solución viscosa se puede calcular para tiempos post-choque $t \geq 1$. Aproxima la solución a tiempo $t = 2$ para $\epsilon = 0.005, 0.02$. Que observas para el valor más chico de ϵ? Grafica las dos soluciones. Puedes conjeturar a que converge la solución cuando $\epsilon \to 0$ a tiempo $t = 2$? **40 puntos**

Sugerencia para la solución numérica:

- Dada la condición inicial $u_o(x)$, aplica la transformada Cole-Hopf
$$\varphi_o(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}\int_{x_o}^{x} u_o(s)dz\right).$$
- Resuelve la ecuación del calor $\varphi_t = \epsilon\varphi_{xx}$ con la condición inicial $\varphi_o(x)$. Usa el método numérico en diferencias finitas de la tarea pasada.
  Nota: Usa condiciones Neumann $\partial_x\varphi(-3,t) = \partial_x\varphi(3,t) = 0$. En el código, las condiciones periódicas se leían $\varphi(0) = \varphi(N), \varphi(N+1) = \varphi(1)$. Para condiciones Neumann en φ, debes usar $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi(N+1) = \varphi(N)$.
- Vuelve a la ecuación de Burgers viscosa mediante la transformada inversa $u = -2\epsilon\varphi_x/\varphi$.

Respuesta:

(a):

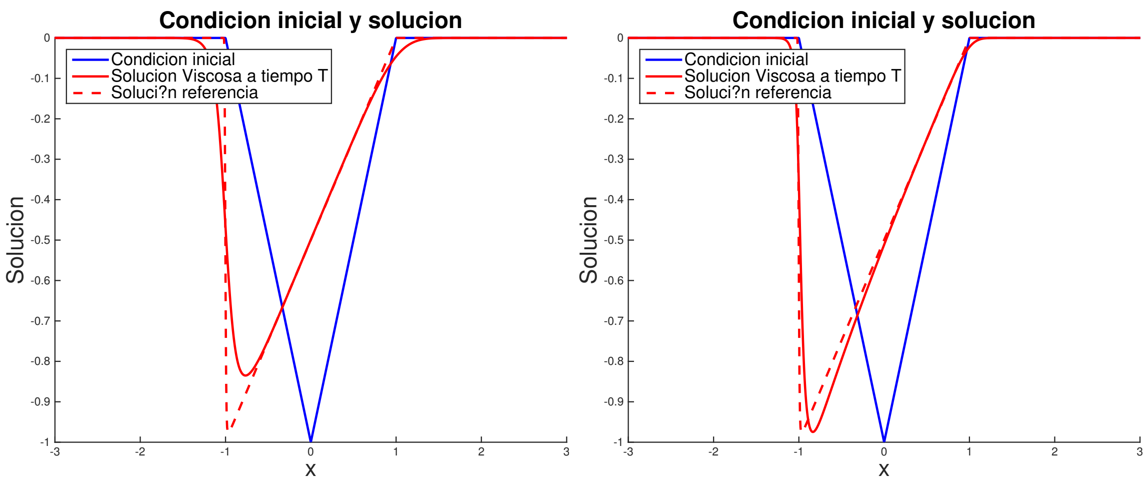

FIGURE 1. Solución al problema (0.0.1) a tiempo $t = 1$ con $\epsilon = 0.02$ (izquierda) y $\epsilon = 0.005$ (derecha). En azul se muestra la condición inicial. La linea roja continua es la solución obtenida con el código adjunto y siguiendo las recomendaciones arriba. La línea roja punteada calcula una solución referencia calculada para la ecuación de Burgers sin viscosidad con un método upwind.

La figura 1 muestra la solución al problema (0.0.1) con $\epsilon = 0.02$ (izquierda) y $\epsilon = 0.005$ (derecha). En azul se muestra la condición inicial. La linea roja continua es la solución obtenida con el código adjunto y siguiendo las recomendaciones arriba. La línea roja punteada calcula una solución referencia calculada para la ecuación de Burgers sin viscosidad con un método upwind (no necesario para la tarea pero incluido aquí para ver los efectos de la viscosidad).

La solución referencia muestra que a tiempo $t = 1$ se forma una discontinuidad, cuando las curvas características se intersecan. La solución en el panel de la izquierda vemos que la viscosidad en Burgers suaviza la discontinuidad formada. En el panel de la derecha vemos como una viscosidad reducida acerca más la solución viscosa a la no viscosa.

Respuesta a la parte (b) en la siguiente página

(b):

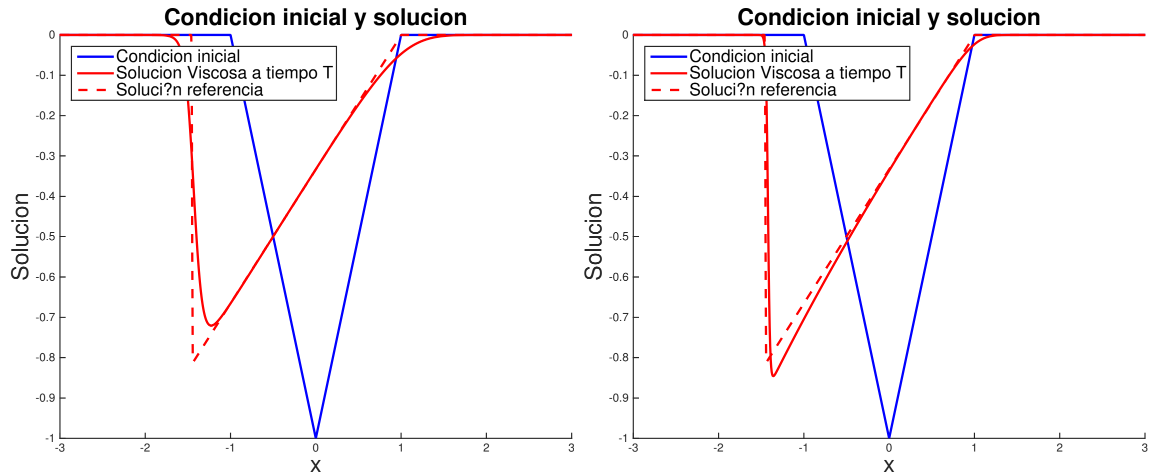

FIGURE 2. Solución al problema (0.0.1) a tiempo $t = 2$ con $\epsilon = 0.02$ (izquierda) y $\epsilon = 0.005$ (derecha). En azul se muestra la condición inicial. La linea roja continua es la solución obtenida con el código adjunto y siguiendo las recomendaciones arriba. La línea roja punteada calcula una solución referencia calculada para la ecuación de Burgers sin viscosidad con un método upwind.

Como las curva características se intersecan a tiempo $t = 1$, el método de las curvas características y la teoría clásica de soluciones fuertes no nos permite seguir mas allá de $t = 1$. Sin embargo, Burgers viscosa mediante la transformada Cole-Hopf si se puede resolver a tiempos post-choque. La figure 2 muestra la solución al problema (0.0.1) a tiempo $t = 2$ con $\epsilon = 0.02$ (izquierda) y $\epsilon = 0.005$ (derecha). En azul se muestra la condición inicial. La linea roja continua es la solución obtenida con el código adjunto y siguiendo las recomendaciones arriba. La línea roja punteada calcula una solución referencia calculada para la ecuación de Burgers sin viscosidad con un método upwind. La línea roja punteada muestra la solución no viscosa a tiempos post-choques (no solicitado a los estudiantes). Como veremos mas tarde, este método en diferencias finitas calcula una solución débil en la que se permiten discontinuidades (ondas de choque) que se propagan a ciertas velocidades. En el panel de la izquierda vemos lo que pasa con la solución viscosa a tiempos post-choque. El panel de la derecha reduce la viscosidad y vemos como la solución va convergiendo a una solución con una discontinuidad. La discontinuidad a tiempo $t = 1$ se localizaba en $x = -1$. A tiempo $t = 2$, ésta se localiza cerca de $x = -1.5$, por lo que la discontinuidad se propaga a la izquierda en este caso. De esto modo, vemos que la solución débil es el límite de la solución viscosa cuando la viscosidad se va a cero.