TERMINAL IV: SIMULACIÓN
SEMESTRE 2016-2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes 4 de octubre de 2016
Durante los 10 minutos al inicio de la clase 100%
Después de clase y hasta la media noche de ese día 80%

Problema: En el problema 3 del examen 1 consideraste una ecuación de Burgers con condiciones iniciales específicas y demostraste que las curvas características se cruzaban a tiempo $t = 1$. Considera ahora la equivalente ecuación de Burgers viscosa con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) & = & \epsilon u_{xx}, & -3 \leq x \leq 3 \\ u(x,0) & = & \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \leq -1 \\ -1-x & \text{if} \quad -1 < x \leq 0 \\ -1+x, & \text{if} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if} \quad 1 < x. \end{cases} & \\ u(-3,t) = u(3,t) = 0. & & \text{Condición de frontera Dirichlet} & \end{cases}$$

Usando la transformada de Cole-Hopf, resuelve el problema anterior. Considera valores de ϵ decrecientes y comenta que observas cuando $\epsilon \to 0$. Específicamente,

(a) Aproxima numéricamente la solución a tiempo $t = 0.5, 1$, y para cada tiempo, considera dos valores del coeficiente de viscosidad $\epsilon = 0.005, 0.02$. Sin viscosidad, las curvas características nos da una solución exacta para tiempos $t \leq 1$ cuando las curvas se intersecan por primera vez, para la condición inicial dada arriba. Para cada tiempo, grafica tanto la solución exacta como la aproximada. **60 puntos**

(b) La solución viscosa se puede calcular para tiempos post-choque $t \geq 1$. Aproxima la solución a tiempo $t = 2$ para $\epsilon = 0.005, 0.02$. Que observas para el valor más chico de ϵ? Grafica las dos soluciones. Puedes conjeturar a que converge la solución cuando $\epsilon \to 0$ a tiempo $t = 2$? **40 puntos**

Sugerencia para la solución numérica:

- Dada la condición inicial $u_o(x)$, aplica la transformada Cole-Hopf
$$\varphi_o(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}\int_{x_o}^{x} u_o(s)dz\right).$$
- Resuelve la ecuación del calor $\varphi_t = \epsilon\varphi_{xx}$ con la condición inicial $\varphi_o(x)$. Usa el método numérico en diferencias finitas de la tarea pasada.
  Nota: Usa condiciones Neumann $\partial_x\varphi(-3,t) = \partial_x\varphi(3,t) = 0$. En el código, las condiciones periódicas se leían $\varphi(0) = \varphi(N), \varphi(N+1) = \varphi(1)$. Para condiciones Neumann en φ, debes usar $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi(N+1) = \varphi(N)$.
- Vuelve a la ecuación de Burgers viscosa mediante la transformada inversa $u = -2\epsilon\varphi_x/\varphi$.