TERMINAL IV: SIMULACIÓN
SEMESTRE 2016-2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
TAREA 6

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles 16 de noviembre de 2016
Durante los 10 minutos al inicio de la clase 100%
Después de clase y hasta la media noche de ese día 80%

Problema 1: La ecuación del tráfico se puede modelar con la ecuación

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0,$$

donde ρ es la densidad de carros, $0 \leq \rho \leq 1$, $u = u_{\max}(1-\rho)$ es la velocidad de los vehículos, con velocidad maxima constante $u_{\max}$. De esta manera, la velocidad de los vehículos alcanza su máximo $u = u_{\max}$ cuando no hay carros alrededor $\rho \to 0$, y están parados $u = 0$ cuando hay embotellamiento $\rho \to 1$. Resuelve el siguiente problema Riemann, identificando los casos en los que hay ondas de choque y los casos en los que hay una onda de rarefacción.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & -\infty < x < \infty \\ \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_\ell & \text{if} \quad x < 0 \\ \rho_r & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases} & \end{cases}$$

Problema 2: Resuelve numéricamente el problema

$$\begin{cases} \rho_t + a\rho_x = 0, \\ \rho(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -L \leq x < 0 \\ 0 & \text{if} \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} \end{cases}$$

con $a = 1, L = 1, t = 1/2$, con condiciones de frontera Neumann, y usando los siguientes esquemas numéricos

- Esquema 1:
$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n\right).$$
- Esquema 2:
$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n\right).$$

Usa la condición CFL $a\Delta t/\Delta x \leq 1$. Reporta lo que observas.

Tarea 6

Problema 1: Ecuación del tráfico

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_l & \text{si } x < 0 \\ \rho_r & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$u = u_{max}(1-\rho) \Rightarrow \partial_t + \partial_x (u_{max} \rho (1-\rho)) = 0$

Flujo $f(\rho) = u_{max}(\rho - \rho^2) \Rightarrow f'(\rho) = u_{max}(1-2\rho)$

Hay una onda de choque cuando $f'(\rho_l) > f'(\rho_r)$

$\Leftrightarrow u_{max}(1-2\rho_l) > u_{max}(1-2\rho_r) \Leftrightarrow \rho_r > \rho_l$

Entonces hay rarefacción cuando $\rho_l \geq \rho_r$

En ese caso hay que buscar la solución

$f'(a(\xi)) = \xi \Rightarrow u_{max}(1-2a(\xi)) = \xi \Rightarrow a(\xi) = \dfrac{1-\xi/u_{max}}{2}$

Para las ondas de choque, su velocidad es:

$$s = \frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{u_{max}(\rho_r - \rho_r^2 - \rho_l + \rho_l^2)}{\rho_r - \rho_l} = u_{max}(1-(\rho_l + \rho_r))$$

Entonces la solución al problema de Riemann es el siguiente:

$$\text{Si } \rho_r > \rho_l \Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} \rho_l & \text{si } x < st \\ \rho_r & \text{si } x \geq st \end{cases} \quad \text{si } s = u_{max}(1-\rho_l-\rho_r)$$

$$\text{Si } \rho_l \geq \rho_r \Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} \rho_l & \text{si } x/t \leq u_{max}(1-2\rho_l) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2u_{max}}\frac{x}{t} & \text{si } u_{max}(1-2\rho_l) \leq x/t \leq u_{max}(1-2\rho_r) \\ \rho_r & \text{si } x/t \geq u_{max}(1-2\rho_r) \end{cases}$$

Problema 2: Resolver ~~el~~ numericamente el problema de Riemann con $\rho_l = 1, \rho_r = 0$
Código adjunto.
Conclusiones:

El esquema 1 es inestable, aún si Δt decrece. Se puede ver ~~esta~~ facilmente ésto con una análisis de estabilidad de Von-Neumann

El esquema 2 resuelve bien la onda de choque, como lo vemos en la comparación con la solución exacta. Esto nos dará la idea para el esquema upwind en problemas no-lineales