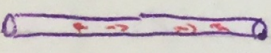
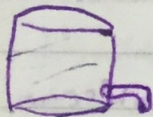


## Leyes de conservación escalares

- Un ducto con un fluido con densidad  $\rho$
- 
- Ducto tiene área seccional  $A$  en cada, de modo que el fluido solo se mueve  $\leftarrow$  a  $\rightarrow$  y viceversa

- Ley de conservación: La razón de cambio de masa en una sección  $[x_0, x_1]$  del ducto es igual al flujo de masa que entra menos el que sale (1)

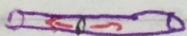


- agua sale a una  $r = 1 \text{ cm}^3/\text{s}$
- en un tiempo  $t$ :  $t r$
- $S, r = r(t) = 1 \text{ cm}^3/\text{s} (s-t)$
- en un tiempo  $t$ :  $\int_0^t r(t') dt'$

$$m(t) = m_0 - \int_0^t r(t') dt'$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = -r(t)$$

L



$\rho(x, t)$  = densidad de un material

$F(x, t)$  = flujo de material en el pto  $x$  a tiempo  $t$  ( $\text{m}/\text{cm}^2$ )

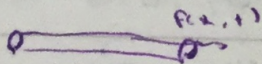
Ley de conservación

masa  $[x_0, x_1]$ :  $\int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx A$  (kg)

Razón de cambio  $\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx$

El material solo puede entrar por los extremos

¿Cuánto entra y sale?



$$\text{Ley } \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx A = -f(x_1, t) A + f(x_0, t) A$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx = - (F(x_1, t) - F(x_0, t))$$

$$= - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx$$



Ec. integro-diferencial

$$\rightarrow \partial_x; \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\rho = \rho(x, t)$$

$$f = f(x, t)$$

Hay 2 vars y 1 ecuación

Necesito más restricciones under determinación

cerramos el sistema, viendo como  $f$  puede estar relacionado con la densidad  $\rho$

La estructura del flujo va a depender del problema que analicemos

Ejemplo: Difusión del calor

- De regiones calientes a frías
- Entre mayor es la dif. de temp. mayor es la difusión

Ecuación: Sea  $u$  la temperatura

$$f = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$



$k$  = conductividad  
(depende del material)

entonces  $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (-k \frac{\partial u}{\partial x})$

$= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  suponiendo  $k$  constante

¿Cómo se resuelve?

Método de separación de variables

$$u(x, t) = \psi(x) \phi(t)$$

tarea: encontrar sol.  $\psi$  y  $\phi$ .

$$u_t = \psi(x) \phi'(t)$$

$$\psi(x) \phi'(t) = k \psi''(x) \phi(t)$$

$u$

- Separar:

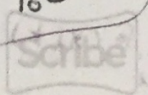
$$u_{xx} = \psi''(x) \phi(t)$$

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$$

$$k \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$$

$$C = \frac{\phi'(t)}{k \phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = C$$

$$\phi(t) = \phi_0 e^{kt}$$





(adivinación  $y = e^{rx}$ )  
(ansatz)

Tarea: Encontrar las sol. gen de

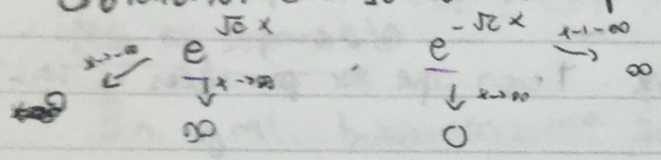
$\phi''(x) = c \phi(x)$  Sugerecias: Distinguir casos  $c > 0$  o  $c < 0$

$\phi''(x) - c \phi(x) = 0$

$r^2 + 0r - c = 0 \quad r = \pm \sqrt{+4c}r = \pm \sqrt{c}$

- $c > 0 \Rightarrow \phi(x) = c_1 e^{\sqrt{c}x} + c_2 e^{-\sqrt{c}x}$
- $c = 0 \Rightarrow \phi(x) = c_1 x + c_2$
- $c < 0 \Rightarrow \phi(x) = c_1 e^{\sqrt{c}x} + c_2 e^{-\sqrt{c}x}$   
 $e^{\pm i\sqrt{c}x} = \cos \sqrt{c}x + i \sin \sqrt{c}x$   
 $\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{c}x + c_2 \sin \sqrt{c}x$

$c > 0$  Obtenemos dos soluciones principales



$c < 0 \Rightarrow c = -M^2$  me da  
 $\lambda = \pm Mi \quad e^{\lambda x} = \cos Mx + i \sin Mx$

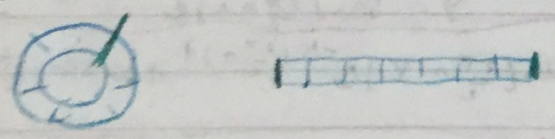
Obtenemos dos sols. principales

cos Mx      sen Mx      periódicos      periodo  $p = \frac{2\pi}{M}$

• Seamos más específicos: (condiciones iniciales y de frontera)

$$\begin{cases} U_t = k U_{xx} & 0 \leq x \leq L \\ U(x, 0) = U_0(x) \\ \text{condiciones de frontera periódicas} \\ U(L, t) = U(0, t) \end{cases}$$

Es como modelar el calor en un anillo



Empezamos con sols. separadas  $u = \phi(t) \psi(x)$  que no necesariamente satisfacen la cond. inicial



$$u(x, t) = \Phi(t) \Psi(x) \Rightarrow u(x, 0) = \Phi(0) \Psi(x) \stackrel{?}{=} M_0(x)$$

Primero nos fijamos en las condiciones de frontera

Sabemos que  $\Psi(x)$  es combinación lineal de las sol. principales

$$\Psi(x) = a \cos(Mx) + b \sin(Mx)$$

Condición de frontera

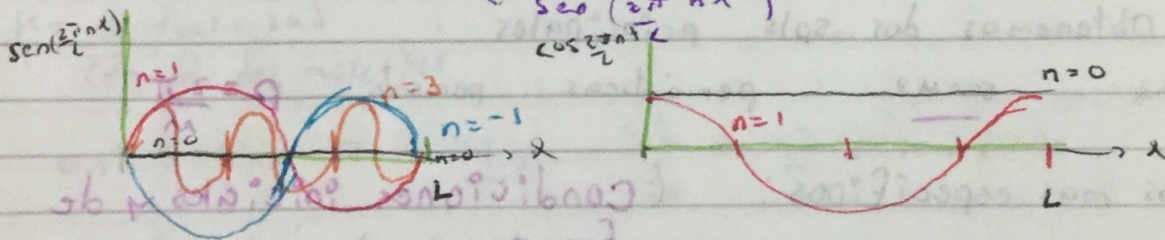
$$u(L, t) = u(0, t) \Leftrightarrow \Phi(t) \Psi(L) = \Phi(t) \Psi(0) \quad \forall t \Leftrightarrow \Psi(L) = \Psi(0)$$

Tarea: ¿Qué restricción hay en  $M$  sobre el periodo?

$k \rightarrow m^2/s$   $\cos Mx, \sin Mx$  Tienen que ser periódicas en  $[0, L]$

$$ML = 2\pi n \Rightarrow M = \frac{2\pi}{L} n$$

$$\rightarrow \ominus -k \left( \frac{2\pi}{L} n \right)^2 + \begin{cases} \cos \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) \\ \sin \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) \end{cases}$$



¿Cómo satisfacer las condiciones iniciales?

Idea: Como  $\partial_t u = k \partial_x^2 u$  es una EDP lineal  $\Rightarrow u(x, t) = \sum (f_n(x) \Phi_n(t))$  combinación lineal de soluciones también es solución

Comprobamos...

Pr  $c \in \mathbb{Z}$   $\cos \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) e^{-k \left( \frac{2\pi}{L} n \right)^2 t}$  y  $\sin \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) e^{-k \left( \frac{2\pi}{L} n \right)^2 t}$   
 son soluciones en  $\mathbb{T}$ .  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) e^{-k \left( \frac{2\pi}{L} n \right)^2 t} + b_n \sin \left( \frac{2\pi}{L} n x \right) e^{-k \left( \frac{2\pi}{L} n \right)^2 t}$

¿Son todas?



(1) Ejemplo  $u_0(x, 0) = \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)$

$\Rightarrow u(x, t) = e^{-k\left(\frac{6\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)$  cumple ✓

(2) Ejemplo  $\begin{cases} \partial_t u = \kappa \partial_x^2 u & 0 \leq x \leq L \\ u_0(x, 0) = \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + 3 \sin\left(\frac{10\pi}{L}x\right) \\ u \text{ periódica en } [0, L] \end{cases}$

$\Rightarrow u(x, t) = e^{-k\left(\frac{6\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + 3e^{-k\left(\frac{10\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{10\pi}{L}x\right)$  ✓

No es separable

En genl. buscamos una superposición

•  $u(x, t) = \sum e^{-k\left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2 t} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}n x\right) \right)$   
que satisfaga la condición inicial

•  $u(x, 0) = a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}n x\right)$

Esta es la serie (de Fourier) en senos y cosenos (serie de Fourier)

Se asegura que si  $u_0(x)$  es suave por pedazos y acotado ent. podemos encontrar de manera única los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  que cumplen la descompos. c. ón de arriba.







Notar que si  $U_0$  es real valorada ent.

$$C_n = \int_0^L e^{\frac{2\pi i n x}{L}} U_0(x) dx = \int_0^L e^{-\frac{2\pi i (-n) x}{L}} U_0(x) dx = C_{-n}$$

Solución a la ecuación del calor en un anillo

$$\begin{cases} \partial_t U = \kappa \partial_x^2 U & 0 \leq x \leq L \\ U(x, 0) = U_0(x) \\ U(x, t) \text{ periódica en } [0, L] \end{cases}$$

Sol:  $C_n = \int_0^L U_0(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$

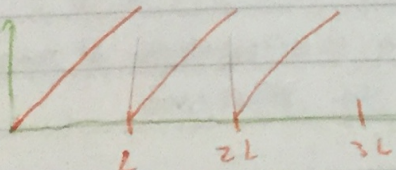
$$U(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} e^{-\kappa \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 t} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right)$$

donde  $a_n = 2 \operatorname{Re}(C_n)$   $b_n = -2 \operatorname{Im}(C_n)$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

Ejemplo,  $U_0(x) = x$   $0 \leq x \leq L$



$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left( x \frac{\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}{\frac{2\pi n}{L}} - \int_0^L \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left( -x \frac{\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)}{\frac{2\pi n}{L}} + \int_0^L \frac{L}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \right)$$

$$= -\frac{2L}{2\pi n} = -\frac{L}{n\pi}$$



$$n=0 \quad L$$

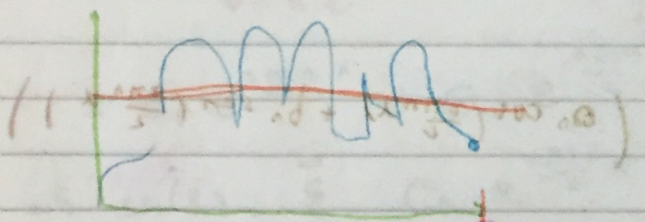
$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x = L \rightarrow a_0 = L, \quad a_n = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$b_0 = 0, \quad b_n = \frac{-L}{n\pi} \quad n \neq 0$$

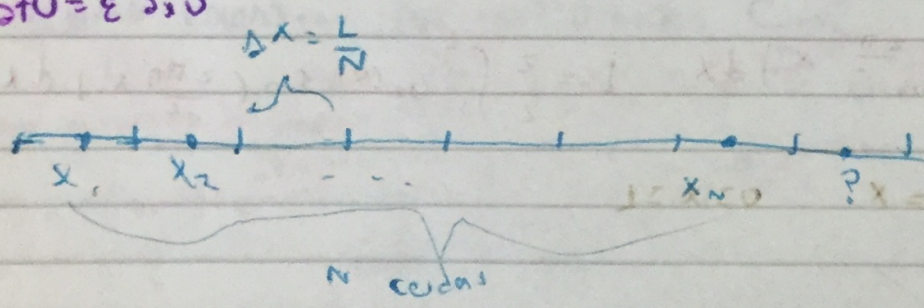
$$U(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa(2\pi n)^2 t} C_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L v_0(x) dx$$

= promedio de  $v_0$  en  $x$



use  $3 = Nt$



~~$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L v_0(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$~~

~~$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$~~



# Calculo numérico de la <sup>solución</sup> ec. del calor

$$\begin{cases} U_t = \kappa U_{xx} & 0 \leq x \leq L \\ U(x, 0) = U_0 \\ U \text{ periódica en } [0, L] \end{cases}$$

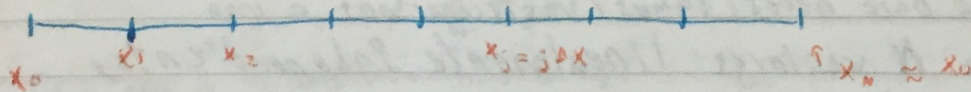
$$U_0(x) = \sum a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{serie de Fourier}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L U_0(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \quad \text{coef. de Fourier } n\text{-ésimo}$$

$$U(x, t) = \sum a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} e^{-\frac{\kappa (2\pi i n)^2 t}{L^2}}$$

Numericamente solo podemos usar un número finito de modos de Fourier ( $e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ ) y evaluarlos en un # finito de pts.

Supongamos que inicialmente tenemos los valores  $U_0$  en un número finito de pts  $x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, \dots, x_{N-1}=(N-1)\Delta x$  con  $\Delta x = L/N$



$$x_j = j\Delta x, \quad j=0, \dots, N-1$$

$U_j^0 := U_0(x_j)$  ← datos disponibles.

podemos suponer

$$U_0(x) = \begin{cases} U_j^0 & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases}$$

Queremos la descomposición en modos de Fourier para esta función constante por pedazos

$$U_0 = \frac{U_1^0}{L} + \frac{U_2^0}{L} + \dots$$

$$U_0(x_j) = U_j^0 = \sum_{n \neq 0} a_n e^{\frac{2\pi i n x_j}{L}}$$

obs:  $e^{\frac{2\pi i n x_j}{L}} = e^{\frac{2\pi i n j \Delta x}{L}} = e^{\frac{2\pi i n j}{N}} = e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$

Definamos el vector para cada  $n \in \mathbb{Z}$

$$\vec{V}_n = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i n \cdot 0}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i n \cdot 1}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i n \cdot 2}{N}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i n \cdot (N-1)}{N}} \end{bmatrix}$$

es el vector de tamaño N con

entrada  $j$ -ésima  $e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$



Notemos que

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_0^1 \\ u_0^2 \\ \vdots \\ u_0^{N-1} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \vec{v}_n$$

Además notar que

$$\begin{aligned} \vec{v}_{n+N} &= \vec{v}_n \text{ pues } e^{\frac{2\pi i j (n+N)}{N}} = e^{\frac{2\pi i j n}{N}} e^{\frac{2\pi i j N}{N}} \\ &= e^{\frac{2\pi i j n}{N}} e^{2\pi i j} = e^{\frac{2\pi i j n}{N}} \end{aligned}$$

Por inducción  $\vec{v}_{n+mN} = \vec{v}_n$

$$\underbrace{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{N-1}}_{N \text{ vect.}}, \underbrace{\vec{v}_N, \dots, \vec{v}_{2N-1}}_{N \text{ vect.}}, \underbrace{\vec{v}_{2N}, \dots, \vec{v}_{3N-1}}_{N \text{ vect.}}, \dots, \underbrace{\vec{v}_{-N}, \vec{v}_{-N-1}, \dots, \vec{v}_{-1}}_{N \text{ vect.}}$$

Para tener una base necesitamos restringirnos a una subcolección de  $N$  vectores linealmente independientes, pues  $\vec{u}_0$  es de dimensión  $N$

Opción 1:  $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{N-1}$

Opción 2:

$N$  par

$$\vec{v}_{\frac{N}{2}}, \dots, \vec{v}_{-1}, \vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\frac{N}{2}-1} \leftarrow N \text{ elementos}$$

La forma en que se escribió la base en la opción 1 nos dio la transformada de Fourier discreta

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \vec{v}_n = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \vec{v}_0 & \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_{N-1} \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}$$



La transformada de Fourier discreta se puede escribir en forma matricial

M con entradas  $M_{j,n} = e^{\frac{z\pi i (j-1)(n-1)}{N}}$

$$M = \begin{bmatrix} e^{\frac{z\pi i \cdot 0 \cdot 0}{N}} & e^{\frac{z\pi i \cdot 0 \cdot 1}{N}} & \dots & e^{\frac{z\pi i \cdot 0 \cdot (N-1)}{N}} \\ e^{\frac{z\pi i \cdot 1 \cdot 0}{N}} & e^{\frac{z\pi i \cdot 1 \cdot 1}{N}} & \dots & e^{\frac{z\pi i \cdot 1 \cdot (N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\frac{z\pi i \cdot (N-1) \cdot 0}{N}} & e^{\frac{z\pi i \cdot (N-1) \cdot 1}{N}} & \dots & e^{\frac{z\pi i \cdot (N-1) \cdot (N-1)}{N}} \end{bmatrix}$$

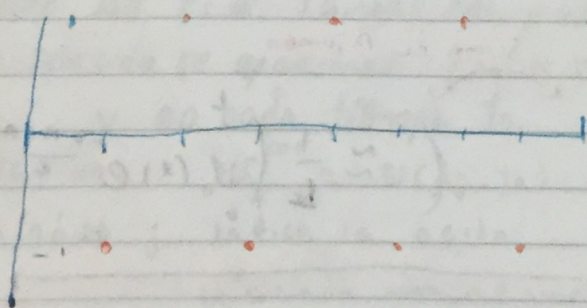
Opción 2:

Para  $j: 0 \rightarrow N-1$  la entrada  $j+1$  del vector  $\vec{y}_{\frac{N}{2}+k}$  es:

$$\vec{y}_{\frac{N}{2}+k}(j+1) = e^{\frac{z\pi i (\frac{N}{2}+k)j}{N}} = e^{\frac{z\pi i j}{2}} e^{\frac{z\pi i k j}{N}} = e^{\pi i j} e^{\frac{z\pi i k j}{N}}$$

$$= (-1)^j \vec{y}_k(j+1)$$

Qué pasa si la condición inicial es  $u_0 = (-1)^j$



¿Cómo se descompone en modos de Fourier?

~~se conoce como~~

La base  $\vec{y}_{-\frac{N}{2}}, \dots, \vec{y}_1, \vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{\frac{N}{2}-1}$

es el número mayor de modos de Fourier que podemos tomar para una malla de  $N$  elementos. A  $\frac{N}{2}$  se le conoce como el número de Nyquist



$\sum_{n=0}^{1000} a_n$  de  $n=1000$  cont.

osc. 14 1000

Si  $u_0(x) = \sum a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$  es real ent.  $a_{-n} = \bar{a}_n$

En estos casos no es necesario calcular  $a_{-N/2}, \dots, a_{-1}$

y solo necesitamos  $a_0, \dots, a_{N/2-1}$

$$a_0 = \bar{a}_0 \Rightarrow a_0 \text{ es real}$$

$(\frac{N}{2} + 1)$  números complejos + 1 real  $\Leftrightarrow N+1$  números reales

Dada cualquier condición inicial  $\vec{U}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix}$

$$\vec{U}_0 = \sum_{n=N/2}^{N-1} a_n \vec{Y}_n \quad \text{donde}$$

$$\vec{Y}_n = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i n \cdot 0}{L}} \\ e^{\frac{2\pi i n \cdot 1}{L}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2\pi i n (N-1)}{L}} \end{bmatrix}$$

es el  $n$ -ésimo modo de Fourier

Suma de Riemann

$$a_n = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta x U_j \cdot e^{-\frac{2\pi i n x_j}{L}}$$

$$\approx \frac{1}{L} \int_0^L U_0(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$$

$$\frac{1}{L} \frac{L}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_j \cdot e^{-\frac{2\pi i n j \eta}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_j \cdot e^{-\frac{2\pi i n j \eta}{N}} = a_n$$



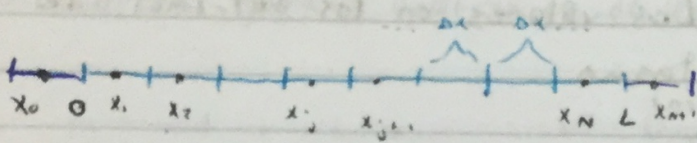
22 / 08 / 17

## Métodos numéricos en diferencias finitas de la ecuación del calor

La ec. del calor

$$\begin{cases} \partial_t U = k \partial_x^2 U & 0 \leq x \leq L \\ U = 0 \end{cases}$$

Condiciones de frontera por especificar

1<sup>er</sup> Paso Discretizar el dominio

N celdas

Dividimos el intervalo  $[0, L]$  de manera uniforme en  $N$  celdas. Mientras mayor sea  $N$  mejor.  $\Delta x = \frac{L}{N}$

El centro de la celda  $j$  es

$$x_j = \Delta x (j - \frac{1}{2}) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Fantasmas  $x_0$  y  $x_{N+1}$ 

Necesitamos dos celdas

$$x_0 = -\Delta x \quad x_{N+1} = \Delta x (N + \frac{1}{2})$$

El tiempo tmb se discretiza como

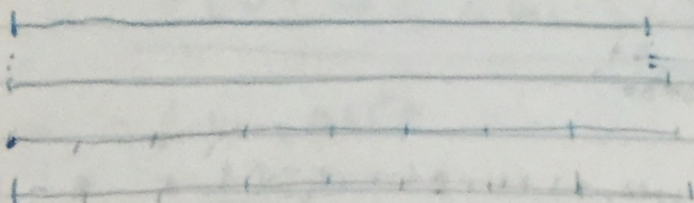
$$t_n = n \Delta t \quad n = 0, 1, \dots$$

donde  $\Delta t$  es el tamaño del paso en el tiempo

- La solución se aproxima con el método numérico en cada celda  $x_j$  y en cada tiempo  $t_n$ .

Notación  $U_j^{(n)} = U(x_j, t_n)$

Subíndice  $j$  indica la celda, superíndice  $(n)$  indica tiempo  
la solución ~~en~~ a tiempo

Obtendremos  $t_{n+1}$  conociendo  $t_n$  $\Delta t =$ 

no. de pasos



$r = e^{-t}$

$\tau = 5$

Las celdas Fantasma se usan para implementar las condiciones de frontera

### Ejemplo: Condiciones de Frontera periódicas

$U(L, t) = U(0, t) \Rightarrow$  la celda  $N+1 =$  celda 1

$$U_0^{(n)} = U_N^{(n)}, \quad U_1^{(n)} = U_{N+1}^{(n)}$$

• Frontera libre: Los valores en los extremos se extrapolan a las celdas Fantasma

$$U_{N+1}^{(n)} = U_N^{(n)}, \quad U_0^{(n)} = U_1^{(n)}$$

• Valores fijos en la Frontera (Condiciones de tipo Dirichlet)

$$U_{N+1}^{(n)} = 0 \quad (0 \text{ un valor constante fijo})$$

$$U_0^{(n)} = 0 \quad \text{fijar la temperatura en los extremos}$$

Recordar que la derivada parcial con respecto a  $t$  en un pto  $(x, t)$  es

$$\partial_t u(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

A la hora de discretizar,  $\Delta t$  no se va a cero sino que es un valor quizá chico pero fijo.

En  $x_j$ , tn tenemos  $u(x, t) \rightarrow u(x_j, t_n) = U_j^{(n)}$

$$u(x, t + \Delta t) = U_j^{(n+1)}$$

Entonces en la aprox. numérica reemplazaremos

$$\partial_t u \text{ por } \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t}$$

¿Qué error estamos cometiendo?

Expansión de Taylor

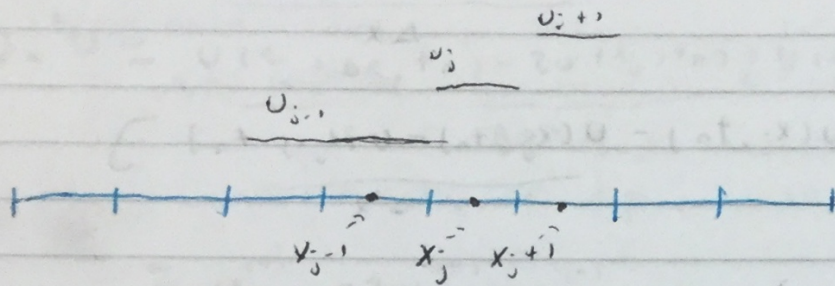
$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{u(x, t) + u_t \Delta t + \frac{u_{tt}}{2} \Delta t^2 + \dots - u(x, t)}{\Delta t} = u_t + \frac{u_{tt}}{2} \Delta t + \dots$$

El error  $\rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t)$

error



¿Cómo discretizar  $\partial_x^2 u(x_0, t_0)$ ?



Una opción para la aproximación de  $u_{xx}$

$$\Rightarrow u_{xx}(x_j, t_n) = \frac{u_x(x_{j+1/2}, t_n) - u_x(x_{j-1/2}, t_n)}{\Delta x}$$

¿Cómo calcular  $u_x$  en las interfaces  $x_{j+1/2}$  y  $x_{j-1/2}$ ?

$$\Rightarrow u_x(x_{j+1/2}, t_n) \approx \frac{u(x_{j+1/2}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x}$$

¿Error? 
$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} = \frac{u(x_{j+1/2} + \Delta x/2, t_n) - u(x_{j+1/2} - \Delta x/2, t_n)}{\Delta x}$$

Taylor

$$= u + u_x \Delta x/2 + u_{xx} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + u_{xxx} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

$$- \left[ u - u_x \frac{\Delta x}{2} + u_{xx} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - u_{xxx} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots \right]$$

$$= u_x + \frac{1}{24} u_{xxx} (\Delta x)^2 + \dots$$

Error de truncamiento es de orden  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x^2)$



Similarmente  $u_x(x_{j-1/2}, t_n) \approx \frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x}$

$$\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} - \frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2}$$

Error de truncamiento  $O(\Delta x^2)$

$$\frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x-\Delta x, t))}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \left[ u + u_x \Delta x + \frac{u_{xx} \Delta x^2}{2} + \frac{u_{xxx} \Delta x^3}{6} + \frac{u_{xxxx} \Delta x^4}{24} - 2u \right]$$

$$+ u - u_x \Delta x + \frac{u_{xx} \Delta x^2}{2} - \frac{u_{xxx} \Delta x^3}{6} + \frac{u_{xxxx} \Delta x^4}{24} + \dots$$

$$= u_{xx} + u_{xxxx} \frac{\Delta x^2}{12} + \dots$$

Error  $O(\Delta x^2)$

Reemplazando  $\partial_t u$  y  $\partial_x^2 u$  por las aproximaciones correspondientes y usando la notación

$$U_j^{(n)} = u(x_j, t_n)$$

$$\partial_t u = \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} = \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t}$$



$$\partial_x^2 U \approx \frac{U(x_j + \Delta x, t_n) - 2U(x_j, t_n) + U(x_j - \Delta x, t_n)}{\Delta x^2}$$

$$\approx \frac{U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} = K \frac{U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2}$$

Despejando obtenemos el esquema (método) numérico

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)})$$

(1) Obs: Si tenemos la solución a tiempo  $t_n$ , podemos construir la solución a tiempo  $t_{n+1}$  y llegar al tiempo deseado de manera recursiva.

De hecho para actualizar la celda  $j$  a tiempo  $t_{n+1}$ , solo necesitamos las celdas vecinas  $j-1$  y  $j+1$  a tiempo  $t_n$ .

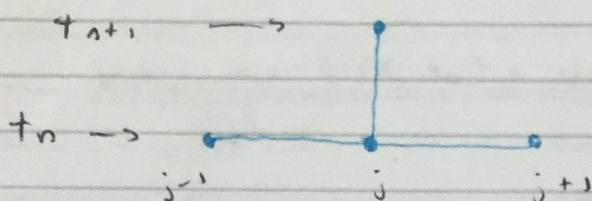
(2) Obs: • Para la primer celda  $j=1$  usaremos la celda fantasma  $j-1=0$  en el algoritmo.  
• Para la última celda  $j=N$  necesitamos  $j+1=N+1$  la otra celda fantasma.

(3) Cada celda fantasma se actualiza en cada paso de acuerdo a las condiciones de frontera.



El stencil (plantilla / "morde") de un algoritmo es una figura de nodos y aristas que nos indica que celdas veces en  $t_n$  se usan para actualizar una determinada celda en  $t_{n+1}$ :

- En este caso tenemos que la plantilla es:



### Error de truncamiento de todo el algoritmo

Supongamos que  $U$  satisface la ecuación del calor de manera exacta:

$$U_t - k \partial_x^2 U = 0$$

En el límite (con las derivadas exactas) el lado derecho es cero. Si sustituimos la aprox. numérica el lado deho ya no es cero debido al error numérico

$$E = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} - k \left( \frac{U(x - \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right)$$

$$\approx U_t + U_{tt} \frac{\Delta t}{2} + \dots - k \left[ U_{xx} + U_{xxx} \frac{\Delta x^2}{6} + \dots \right]$$

$$= \cancel{U_t - k U_{xx}} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \Rightarrow E = O(\Delta t, \Delta x^2)$$

El algoritmo es de 1<sup>er</sup> orden en el tiempo y de 2<sup>o</sup> orden en el espacio.



# Análisis de estabilidad de Von-Neuman

Esquema

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[ U_{j-1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j+1}^{(n)} \right]$$

Buscamos sols. de la forma:

$$U_j^{(n)} = \lambda^n e^{\frac{2\pi i m x_j}{L}}$$

↑ exponencial en el tiempo      ↑ periodica en x

Notar que  $|U_j^{(n)}| = |\lambda^n|$

Si  $|\lambda| < 1 \Rightarrow |\lambda|^n \rightarrow 0$  y el método se dice estable

Si  $|\lambda| > 1 \Rightarrow |\lambda|^n \rightarrow \infty$  y el método se dice inestable

Si  $|\lambda| = 1 \Rightarrow |\lambda|^n = 1$  y el método se dice neutro

Substituyendo obtenemos

$$\lambda^{n+1} e^{\frac{2\pi i m x_j}{L}} = \lambda^n e^{\frac{2\pi i m x_j}{L}} + \gamma \lambda^n \left( e^{\frac{2\pi i m x_{j-1}}{L}} - 2 e^{\frac{2\pi i m x_j}{L}} + e^{\frac{2\pi i m x_{j+1}}{L}} \right)$$

$\gamma = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}$

Dividiendo por  $\lambda^n e^{\frac{2\pi i m x_j}{L}}$  obtenemos

$$\lambda = 1 + \gamma \left( e^{\frac{2\pi i m \Delta x}{L}} - 2 + e^{\frac{2\pi i m (-\Delta x)}{L}} \right)$$

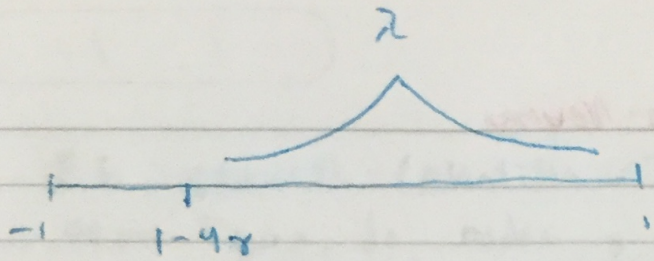
$$= 1 - 2\gamma \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi m \Delta x}{L}\right) \right)$$

El rango de  $1 - \cos$  es 0 a 2

$\lambda$  va de  $1 - 4\gamma$  a 1 y queremos  $|\lambda| \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$$





Una condición suficiente para la estabilidad es

$$-1 < 1 - 4r < 1 \Rightarrow 4r < 2 \Rightarrow r < 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} = r < \frac{1}{2} \quad \text{Dadas } K, \Delta x^2 \text{ y } \Delta t$$

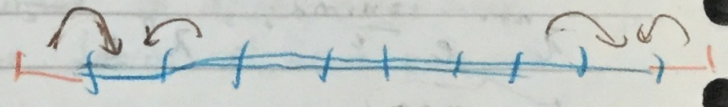
escogiendo un  $r < 1/2$  ( $r = 0.49$  es el código que mostré)

$\Rightarrow \Delta t = \frac{r \Delta x^2}{K}$  es un valor del tamaño del paso estable.

$$F_{i,j} = K \Delta x^2 U_{i,j}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

• Condiciones Dirichlet



$$U_0 = 1 \quad U_{N+1} = 2$$

$$U_{-1} = 1 \quad U_{N+2} = 2$$

• Condiciones Neuman-Dirichlet

$$U_0 = 1 \quad \lambda_x U(1,t) = 0 \Rightarrow \frac{U_{N+1} - U_N}{\Delta x} = 0$$

$$U_{-1} = 1 \quad \Rightarrow U_{N+1} = U_N$$

$$\quad \quad \quad U_{N+2} = U_{N-1}$$

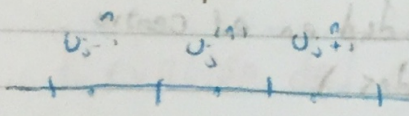


Solución numérica para la ec. del calor con conductividad variable

$$\begin{cases} 2+U = \partial_x (K(x) \partial_x U) & 0 \leq x \leq L \\ U(x,0) = U_0(x) \\ \text{Condición de Frontera} & (\text{Periódica, Dirichlet, Neuman, mixta}) \end{cases}$$

Parte central del esquema numérico

Recordar que para  $k$  este discretizamos



$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + \frac{k \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)})$$

Notar que

$$k \frac{U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2} = k \frac{U_{j+1/2}^{(n)} - U_j^{(n)}}{\Delta x} - U_j^{(n)} - U_{j-1/2}^{(n)} \approx k \partial_x^2 U$$

¿Y si  $K = K(x)$  es variable?

$$\partial_x (K(x) \partial_x U) \approx \frac{K(x_{j+1/2}) (U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)})}{\Delta x} - \frac{K(x_{j-1/2}) (U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})}{\Delta x}$$

Si denotamos  $K_{j+1/2} = K(x_{j+1/2})$ ,  $K_{j-1/2} = K(x_{j-1/2})$

El esquema que consideramos se escribe así:

$$\frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} = \frac{K_{j+1/2} (U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)})}{\Delta x^2} - \frac{K_{j-1/2} (U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + \frac{K_{j+1/2} \Delta t}{\Delta x^2} U_{j+1}^{(n)} - \frac{(K_{j+1/2} + K_{j-1/2}) \Delta t}{\Delta x^2} U_j^{(n)} + \frac{K_{j-1/2} \Delta t}{\Delta x^2} U_{j-1}^{(n)}$$



La condición de estabilidad para  $k$  cte es

$$k \gamma = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2} < 1/2$$

Para  $k$  variable, se toman todas las  $k_j, k_{j+1/2}$  posibles.

Ent. dados  $\Delta x$ ,  $k_{j+1/2}$  (la conductividad en las interfaces  $x_{j+1/2}$ )

Definir  $k_j = \frac{k_{j-1/2} + k_{j+1/2}}{2}$  (la conductividad en el centro de las celdas)

$$k_{max} := \max_j (k_{j-1/2}, k_{j+1/2})$$

Definir  $\gamma < 1/2$  (0.45 por lo general)

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\gamma \Delta x^2}{k_{max}}$$

De esta manera se garantiza la estabilidad para todos los posibles valores de  $k$ .

Tarea Cambiar código

Neumann  $U_0 = U_1$   $U_{N+1} = U_N$   
Dirichlet  $U_0 = \text{valor}$   $U_{N+1} = \text{valor}$



## Tarea IV

Para el caso 9)

obs. que si  $T \rightarrow \infty \Rightarrow \partial_T U = 0$

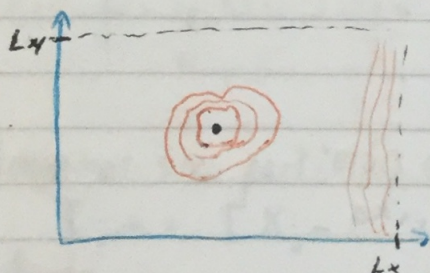
$$\Rightarrow \partial_x (k(x) \partial_x U) = 0$$

$$\Rightarrow k(x) \partial_x U = cte$$

$$\Rightarrow \partial_x U = \frac{cte}{k(x)} \quad \text{entonces} \quad U = cte \int \frac{1}{k(x)} dx + C_2$$

↑  
calcular como suma de Mitman  
de 0 a N.

## Ecuación del calor en 2-D



Calor en plancha

Conductividad  
 $K = K(x, y)$

Temperatura en el pto.  $(x, y)$  a tiempo  $t$ .

$U(x, y, t)$

Ecuación

$$\bullet \partial_t U = \partial_x (k(x, y) \partial_x U) + \partial_y (k(x, y) \partial_y U)$$

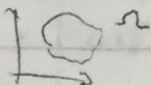
¿Cómo se puede derivar?

Ley de conservación en 2-D:

$$\partial_t U + (F_x(U))_x + (F_y(U))_y = 0$$

donde  $\vec{F} = (F_x, F_y) = \text{Plujo en } (x, y)$  (Por unidad de área, unidad de tiempo)

En una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\int \partial_t U \, dA + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U \, dA = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$



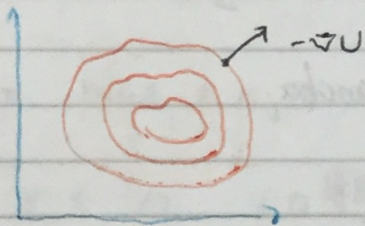
Ley de conservación en 2-D

Tasa de cambio de masa = Lo que entra menos lo que sale

Para el calor el flujo cumple:

- \* El calor va de lo caliente a lo frío
- \* Entre mayor sea la diferencia de temperatura entre dos regiones mayor es el flujo

$U(x, y, t)$  distribución de temperatura y visualicemos sus curvas de nivel



Obs.  $\nabla U$  es perpendicular a las curvas de nivel

Dem: Sea  $s \mapsto (x(s), y(s))$  una parametrización de una curva de nivel ( $t$  es fijo)

$$U(x(s), y(s), t) = cte$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} (U(x(s), y(s), t)) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \nabla U \cdot \frac{d}{ds} (x(s), y(s))$$

$$\text{Ent } \tilde{F} = -k(x, y) \nabla U$$

$$\Rightarrow 0 = \partial_t U + \nabla \cdot (-k(x, y) \nabla U)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t U &= \nabla \cdot (k(x, y) \nabla U) = \nabla \cdot (k(x, y) (\partial_x U, \partial_y U)) \\ &= \partial_x (k(x, y) \partial_x U) + \partial_y (k(x, y) \partial_y U) \end{aligned}$$



## Ecuación del calor en 2D

$$\partial_t U = \partial_x (K(x,y) U_x) + \partial_y (K(x,y) U_y) = \nabla \cdot (K \nabla U)$$

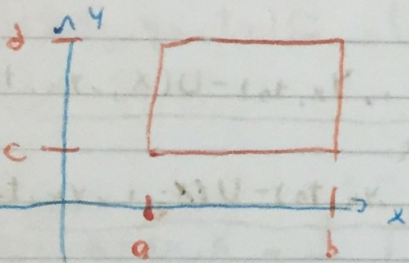
Si  $K$  cte  $\Rightarrow \nabla \cdot (K \nabla U) = K \Delta U$

donde  $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U$

= laplaciano de  $U$

¿Cómo lo podemos discretizar?

El dominio está en 2D y será un cuadrado  $[a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$



Hagamos una partición en celdas

$$I_{j,k} = \left[ x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2} \right] \times \left[ y_k - \frac{\Delta y}{2}, y_k + \frac{\Delta y}{2} \right]$$

donde

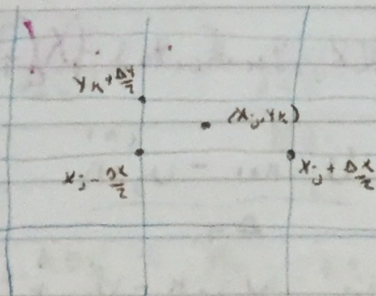
$$\Delta x = \frac{b-a}{N_1} \quad \Delta y = \frac{d-c}{N_2}$$

$N_1$  = Número de puntos en el eje  $x$

$N_2$  = " " " " " " " "  $y$

$$x_j = a + \Delta x (j - 1/2), \quad j = 1, 2, \dots, N_1$$

$$y_k = c + \Delta y (k - 1/2), \quad k = 1, 2, \dots, N_2$$



El centro de la celda  $j,k$   
es  $(x_j, y_k)$



La aproximación para la solución  $U$  en  $(x_j, y_k)$  a tiempo  $t_n = n\Delta t$  se denota por

$$U_{j,k}^{(n)} \approx U(x_j, y_k, t_n)$$

### Discretizaciones de las derivadas

$$\partial_x (K \partial_x U)(x_j, y_k, t_n) \approx \frac{(K \partial_x U)(x_{j+1/2}, y_k, t_n) - (K \partial_x U)(x_{j-1/2}, y_k, t_n)}{\Delta x}$$

$$(K \partial_x U)(x_{j+1/2}, y_k, t_n) \approx \frac{K(x_{j+1/2}, y_k) (U(x_{j+1}, y_k, t_n) - U(x_j, y_k, t_n))}{\Delta x}$$

$$(K \partial_x U)(x_{j-1/2}, y_k, t_n) \approx \frac{K(x_{j-1/2}, y_k) (U(x_j, y_k, t_n) - U(x_{j-1}, y_k, t_n))}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \partial_x (K \partial_x U)(x_j, y_k, t_n)$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[ K_{j+1/2,k} (U_{j+1,k}^{(n)} - U_{j,k}^{(n)}) - K_{j-1/2,k} (U_{j,k}^{(n)} - U_{j-1,k}^{(n)}) \right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[ K_{j+1/2,k} U_{j+1,k}^{(n)} - (K_{j+1/2,k} + K_{j-1/2,k}) U_{j,k}^{(n)} + K_{j-1/2,k} U_{j-1,k}^{(n)} \right]$$

Donde  $K_{j \pm 1/2, k} = K(x_{j \pm 1/2}, y_k)$   
Análogamente

$$\partial_y (K \partial_y U)(x_j, y_k, t_n) \approx (K \partial_y U)(x_j, y_{k+1/2}, t_n) - (K \partial_y U)(x_j, y_{k-1/2}, t_n)$$

$$(K \partial_y U)(x_j, y_{k+1/2}, t_n) = K_{j, k+1/2} \frac{U_{j, k+1}^{(n)} - U_{j, k}^{(n)}}{\Delta y}$$

$$(K \partial_y U)(x_j, y_{k-1/2}, t_n) = K_{j, k-1/2} \frac{U_{j, k}^{(n)} - U_{j, k-1}^{(n)}}{\Delta y}$$



$$\partial_y (\kappa \partial_y U)(x_j, y_k, t_n) \approx \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \kappa_{j, k+\frac{1}{2}}^{(n)} U_{j, k+1}^{(n)} - (\kappa_{j, k+\frac{1}{2}} + \kappa_{j, k-\frac{1}{2}}) U_{j, k}^{(n)} + \kappa_{j, k-\frac{1}{2}} U_{j, k-1}^{(n)} \right]$$

donde  $\kappa_{j, k \pm \frac{1}{2}} = \kappa(x_j, y_{k \pm \frac{1}{2}})$

$$\partial_t U(x_j, y_k, t_n) \approx \frac{U_{j, k}^{(n+1)} - U_{j, k}^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{U_{j, k}^{(n+1)} - U_{j, k}^{(n)}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \kappa_{j+1/2, k}^{(n)} U_{j+1, k}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. - (\kappa_{j+1/2, k} + \kappa_{j-1/2, k}) U_{j, k}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{j-1/2, k} U_{j-1, k}^{(n)} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \kappa_{j, k+\frac{1}{2}}^{(n)} U_{j, k+1}^{(n)} - (\kappa_{j, k+\frac{1}{2}} + \kappa_{j, k-\frac{1}{2}}) U_{j, k}^{(n)} + \kappa_{j, k-\frac{1}{2}} U_{j, k-1}^{(n)} \right]$$

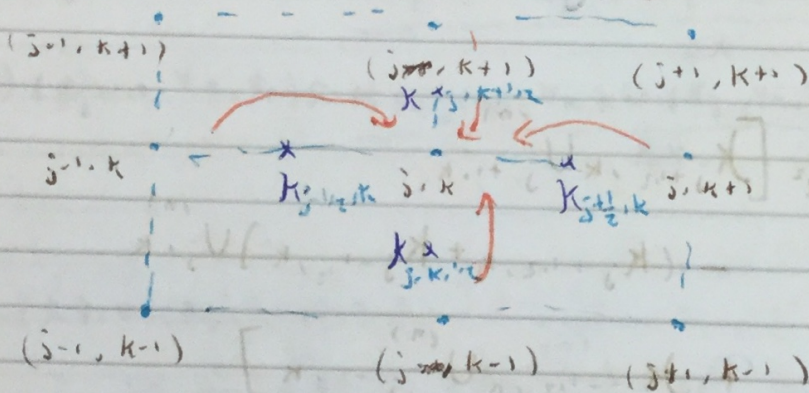
Definir  $\gamma_{j \pm \frac{1}{2}, k} = \frac{\kappa_{j \pm \frac{1}{2}, k} \Delta t}{\Delta x^2}$

$$\gamma_{j, k \pm \frac{1}{2}} = \frac{\kappa_{j, k \pm \frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y^2}$$



El esquema se reduce a:

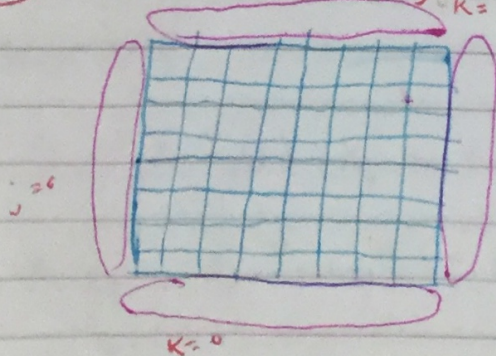
$$U_{j,k}^{(n+1)} = U_{j,k}^{(n)} + \gamma_{j+\frac{1}{2},k} U_{j+1,k}^{(n)} - (\gamma_{j+\frac{1}{2},k} + \gamma_{j-\frac{1}{2},k}) U_{j,k}^{(n)} + \gamma_{j-\frac{1}{2},k} U_{j-1,k}^{(n)} + \gamma_{j,k+\frac{1}{2}} (U_{j,k+1}^{(n)}) - (\gamma_{j,k+\frac{1}{2}} + \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}) U_{j,k}^{(n)} + \gamma_{j,k-\frac{1}{2}} U_{j,k-1}^{(n)}$$



### Estabilidad

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2},k}|, |\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}| \leq 1/2$$

### Celdas Fantasma





## Estabilidad

$$K \text{ constante } \gamma_1 := \frac{\chi \cdot \Delta t}{\Delta x^2}, \quad \gamma_2 := \frac{\chi \cdot \Delta t}{\Delta y^2}$$

$$U_{j,k}^{(n+1)} = U_{j,k}^{(n)} + \gamma_1 (U_{j-1,k}^{(n)} - 2U_{j,k}^{(n)} + U_{j+1,k}^{(n)}) + \gamma_2 (U_{j,k-1}^{(n)} - 2U_{j,k}^{(n)} + U_{j,k+1}^{(n)})$$

$$\text{Si } U_{j,k}^{(n)} = \lambda^n e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)}$$

Sustituimos

$$\lambda^{n+1} e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)} = \lambda^n e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)} + \gamma_1 \lambda^n e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)} (e^{-ik_1 \Delta x} - 2 + e^{ik_1 \Delta x}) + \gamma_2 \lambda^n e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)} (e^{-ik_2 \Delta y} - 2 + e^{ik_2 \Delta y})$$

$$\lambda e^{i(k_1 x_j + k_2 y_k)}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 + 2\gamma_1 (\cos(k_1 \Delta x) - 1) + 2\gamma_2 (\cos(k_2 \Delta y) - 1)$$

$$= 1 - 2\gamma_1 (1 - \cos(k_1 \Delta x)) - 2\gamma_2 (1 - \cos(k_2 \Delta y))$$

Para tener estabilidad se requiere

$$-1 \leq \lambda \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 1 - 4\gamma_1 - 4\gamma_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1/2$$

Pero

$$\Rightarrow \Delta t \chi \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq 1/2$$



29/09/17

## Leyes de conservación escalares

$$\partial_t U + (F(U))_x = 0$$

$U$ : cantidad conservada

$F = F(U(x,t))$ : Flujo de material en el punto  $x$  a tiempo  $t$  por unidad de área y tiempo

Caso más sencillo:  $F$  es una función lineal de  $U$

$$F(U) = aU$$

Da lugar a la ecuación de transporte lineal

$$\partial_t U + (aU)_x = 0 \Leftrightarrow \partial_t U + a \partial_x U = 0$$

$a$ : velocidad de propagación de la información

En este caso  $U = U(x,t)$  funge como una densidad de algún material transportado.

Unidades,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Unidad de  $U$  + Unidad de distancia : Unidad de  $U$

Unidad de tiempo : Unidad de tiempo - Unidad de distancia

the solver

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{array} \right.$$

$$U(x,0) = U_0(x)$$



## Intento 1. Separación de variables

$$U(x,t) = \psi(x)\phi(t)$$

$$\Rightarrow \psi(x)\phi'(t) + q\psi'(x)\phi(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi(x)\phi'(t) = -q\psi'(x)\phi(t) \Leftrightarrow \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = C$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \phi_0 e^{-qct}, \quad \psi(x) = \psi_0 e^{-cx}$$

Si  $U$  tuviera condiciones de frontera periódicas ent.  $C$  sería complejo y encontraríamos una base para la superposición y así construir la solución general.

Sin embargo la función aquí es sobre  $\mathbb{R}$ . Notemos que las soluciones separadas se escriben

$$U(x,t) = U_0 e^{-act} \cdot e^{cx} = U_0 e^{c(x-at)}$$

Se podrá entonces, encontrar soluciones de la forma

$$U(x,t) = U_0(x-at)$$

Si, es la única con la condición inicial

$$U(x,0) = U_0(x-a \cdot 0) = U_0(x)$$

Verif. que mos

$$U(x,t) = U_0(x-at)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a U_0'(x-at)$$

$$+ a \frac{\partial U}{\partial x} = a U_0'(x-at)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Nota: La solución a tiempo  $t$  es una traslación horizontal de la condición inicial con un desplazamiento  $at$

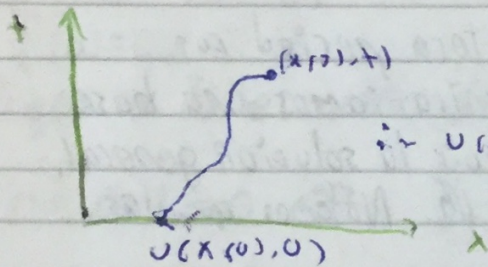


i.e. la información se propaga en el eje  $x$   
a velocidad  $a$ .

Intento 2: Método de las curvas características

El método consiste en encontrar una curva  $(x(t), t)$   
en donde la solución

$u(x(t), t)$  es constante.



$$\therefore u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0)$$

Nota:  $x$  y  $t$  son variables independientes. Pero busco  
 $(x(t), t)$  donde

$$u(x(t), t) = \text{cte}$$

¿Cómo encuentro  $x = x(t)$ ?

$$\frac{d}{dt} [u(x(t), t)] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x(t), t=t} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x = at + x_0$$

$u$  cte  
en cada  
línea



Dado cualquier punto  $(x, t)$  debemos encontrar el  $x_0$  de donde proviene

$$x = x_0 + at \Rightarrow x_0 = x - at$$

Como la solución es cte. en la curva característica ent. vale lo mismo en  $(x, t)$  y en  $(x_0, 0)$

$$\Rightarrow u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = u_0(x - at)$$

$$\therefore u(x, t) = u_0(x - at)$$

- Consideremos ahora el caso en que la velocidad de propagación es variable con respecto a  $x$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Estariamos considerando una ecuación de propagación donde la velocidad varía.

→ → → → →  
¿ Se podría acumular la información en algún punto?  
Por curvas características

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x(t)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x(t)) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$



¿Cómo encontrar la solución  $U(x,t)$ ?

- Paso 1 Encontrar la soluc. en  $U(x,t)$  a la EDO con valores in. cases
- Paso 2 Despejar  $x_0$  como función de  $x$  y de  $t$
- Paso 3 Sustituir  $U(x,t) = U_0(x_0)$

Ejercicio

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + x \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x(t) \\ x(0) = S \end{cases}$$

$\frac{\partial x}{\partial t}$

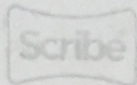
$$x(t) = C \cdot x_0$$

$$x(t) = x_0 + x_0 t$$

$$x_0 = x - x t$$

$$U(x,t) = \sin(x - x t)$$

$$U(x,t) = \sin(x - x t)$$





$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -x \Rightarrow \frac{\partial x}{x} = -\partial t \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{\partial x}{x} = - \int_0^t \partial t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln x - \ln x_0 = -t$$

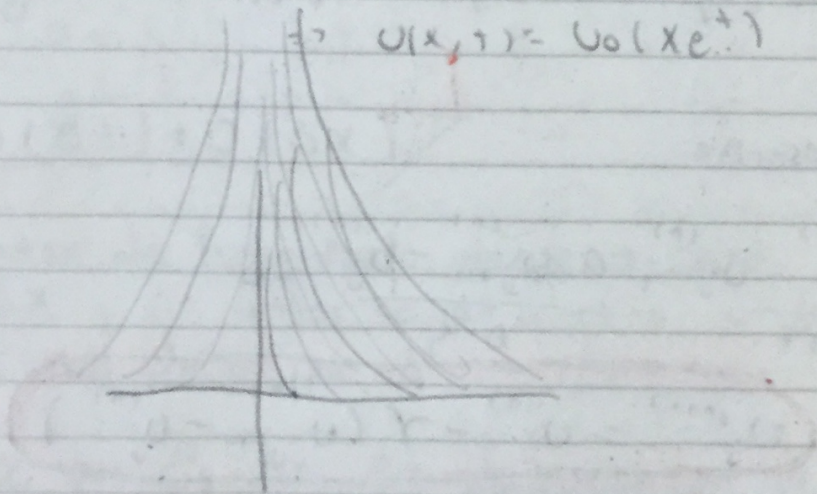
$$\therefore x = x_0 e^{-t}$$

$$x_0 = x e^t$$

$$\Rightarrow u(x, t) = u_0(x e^t)$$

Curvas

$$t = \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)$$



Nota, Las curvas son atraídas por la curva  $x=0$  por su naturaleza de intersección



# Resolución de la ec. de transporte. Con $a$ constante.

Notación

$$U_j^{(n)} = U(x_j, t_n), \quad x_j = (j - 1/2) \Delta x$$
$$t_n = n \Delta t$$

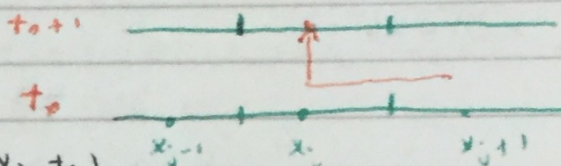
Diferencias finitas

$$\frac{d_t U_j^{(n)}}{\Delta t} = \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t}$$

Opción 1

\* \* \*

$$\frac{\partial_x U|_{x=x_j}}{\Delta x} = \frac{U(x_j + \Delta x, t_n) - U(x_j, t_n)}{\Delta x}$$



Esto da lugar a un esquema de diferencias finitas por la derecha

y se escribe

$$\bullet \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)}}{\Delta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \gamma (U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)})$$

donde  $\gamma = a \Delta t \frac{1}{\Delta x}$  es el número de Courant.

Error y estabilidad

Supongamos que  $u(x, t)$  satisface

$$u_t + a u_x = 0$$

Ent.



$$E = \frac{U(x+\Delta t) - U(x,t)}{\Delta t} + \frac{a U(x+\Delta x, t) - U(x, t)}{\Delta x}$$

$$\text{ent.} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \cancel{U} + U + \Delta t + U_{xx} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots - U \right]$$

$$+ \frac{a}{\Delta x} \left[ \cancel{U} + U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots - U \right]$$

$$= \underbrace{U_t}_{=0} + \frac{U_{xx}}{2} \Delta t + \dots + a U_x + \frac{U_{xx}}{2} \Delta x + \dots$$

$$= \underline{O(\Delta t) + O(\Delta x)}$$

Ent. el error de truncamiento decae a cero cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t$  ambos se van a cero y decae a la misma tasa que  $\Delta t$  y  $\Delta x$ .

Esto nos dice que si  $\Delta x, \Delta t$  decrecen por un factor (digamos  $1/2$ ), entonces el error de truncamiento decae aprox. por el mismo factor.

Cuando se puede garantizar que el error de truncamiento se va a cero cuando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  se dice que el método es consistente con la ecuación.

Como  $E = O(\Delta x, \Delta t)$ , se dice que el método es de primer orden en el espacio y de primer orden en el tiempo.



Estabilidad

$$U_j^{(n)} = e^{i k x_j} \lambda^n$$

Como ent.  $|U_j^{(n)}| = |\lambda|^n = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{si } |\lambda| > 1 \\ \text{cte} & \text{si } |\lambda| = 1 \\ \rightarrow 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \end{cases}$

El método se dice estable si  $|\lambda| < 1$

" " " " inestable si  $|\lambda| > 1$

" " " " neutralmente estable si  $|\lambda| = 1$

Sustituyendo la ecuación anterior en el esquema numérico:

$$e^{i k x_j} \lambda^{n+1} = e^{i k x_j} \lambda^n - \gamma (e^{i k x_{j+1}} \lambda^n - e^{i k x_j} \lambda^n)$$
$$e^{i k x_j} \lambda^n \lambda = e^{i k x_j} \lambda^n - \gamma e^{i k x_j} \lambda^n (e^{i k \Delta x} - 1)$$

ent.  $\lambda = 1 - \gamma (\cos(k \Delta x) + i \sin(k \Delta x) - 1)$   
 $= 1 + \gamma + \gamma (\cos(k \Delta x) + i \sin(k \Delta x))$

$$|\lambda|^2 = (1 + \gamma + \gamma \cos(k \Delta x))^2 + \gamma^2 \sin^2(k \Delta x)$$
$$= (1 + \gamma)^2 + 2(1 + \gamma)\gamma \cos^2 + \gamma^2 \cos^2(k \Delta x) + \gamma^2 \sin^2(k \Delta x)$$
$$= (1 + \gamma)^2 + 2(1 + \gamma)\gamma \cos(k \Delta x) + \gamma^2$$

$$= (1 + \gamma)^2 + 2(1 + \gamma)\gamma + \gamma^2 + 2(1 + \gamma)\gamma (\cos(k \Delta x) + 1)$$

$$= 1 + 2(1 + \gamma)\gamma (\cos(k \Delta x) + 1)$$

queremos que sea negativo

$$\cos(k \Delta x) + 1 \geq 0$$

$$\text{queremos } (1 + \gamma)\gamma \leq 0 \quad \text{queremos } \gamma \leq 0 \quad \text{y} \quad 1 + \gamma \geq 0$$



la condición de estabilidad es

$$-1 \leq \gamma \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \leq 0 \quad (\text{pues } \gamma = \rho \frac{D^+}{D^x})$$

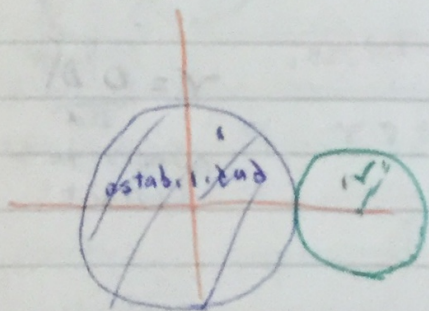
Otra forma o o o

Como  $\cos(KDx) + i \sin(KDx)$  parametriza el círculo unitario.

ent.  $\lambda = H\gamma + \gamma(\cos(KDx) + i \sin(KDx))$

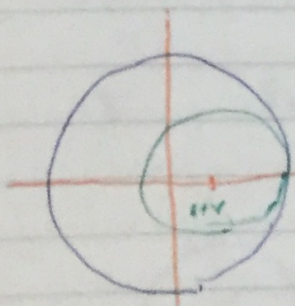
vive en un círculo con centro en  $1+\gamma$  y radio  $|\gamma|$

$\Rightarrow$  si  $\gamma > 0$



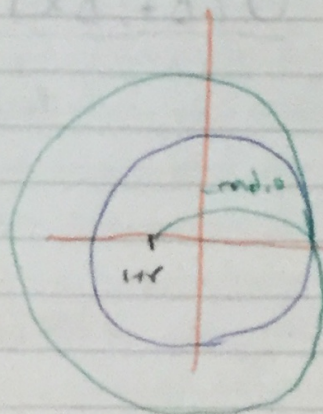
$\Rightarrow$  inestable

si  $-1 \leq \gamma < 0$



estable

si  $\gamma < -1$



inestable

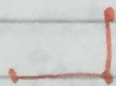


Opción 2. ★ ★ ★

$$U_t = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t}$$

$$U_x = \frac{U(x, t) - U(x - \Delta x, t)}{\Delta x}$$

Plantilla



Esquema:

$$\frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} + a \frac{U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \gamma (U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})$$

$$\gamma = \frac{a \Delta t}{\Delta x}$$

numero de Courant

• Error de truncamiento

$$E = \cancel{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} U_{tt} + \dots + \cancel{\Delta x} U_x - a U_{xt} \frac{\Delta x}{2} + \dots$$
$$= \underline{\underline{O(\Delta t, \Delta x)}}$$



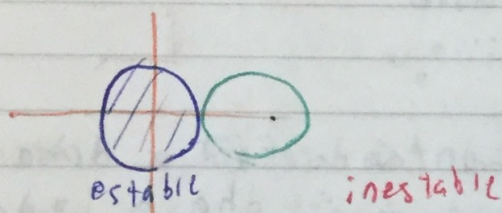
## Estabilidad de Von Neumann

$$U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j}$$

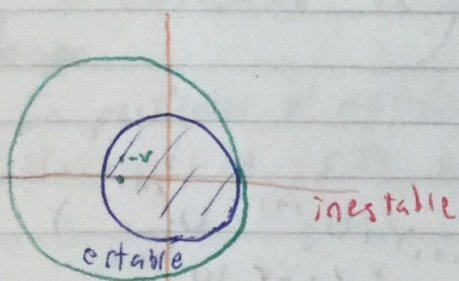
$$\Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - \gamma \lambda^n e^{ikx_j} (1 - e^{ik\Delta x})$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 - \gamma (1 - e^{ik\Delta x}) = 1 - \gamma + \gamma e^{ik\Delta x}$$

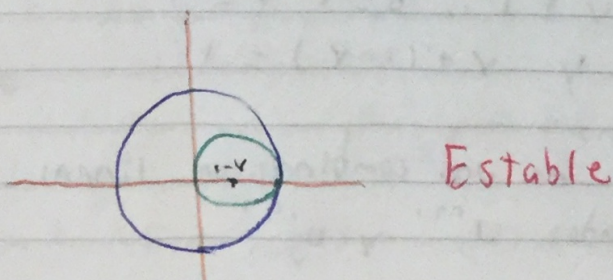
Caso 1 Si  $\gamma < 0$  el centro se sale de la región de estabilidad



Caso 2 Si  $\gamma > 1$



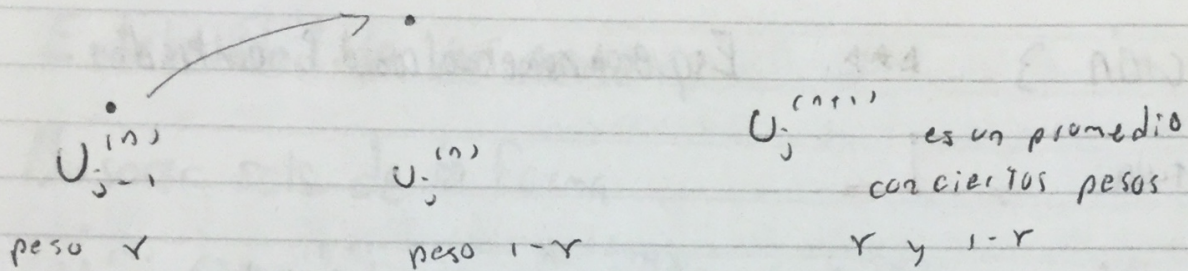
Caso 3 Si  $0 \leq \gamma \leq 1$



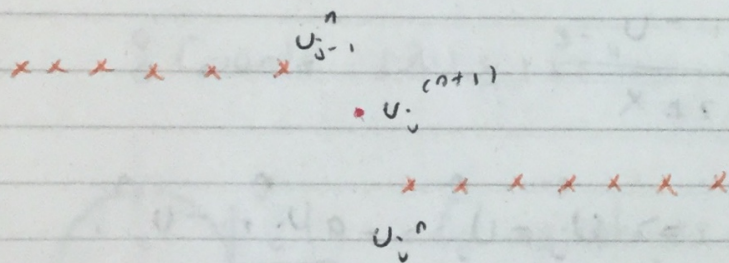






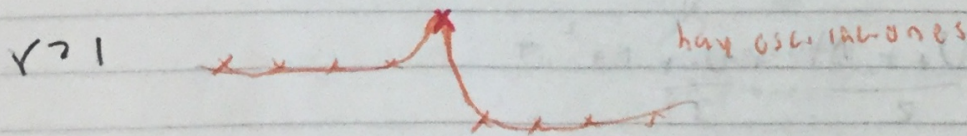


En particular  $U_j^{(n+1)}$  está entre  $U_{j-1}^{(n)}$  y  $U_j^{(n)}$



(Nota, queremos  $\Delta t$  lo más grande posible  
 para reducir tiempo computacional, i.e. queremos  
 $0 \leq \gamma \leq 1$  lo más cercano a 1 posible  
 Se acostumbra escoger  $\gamma = 0.9$ )

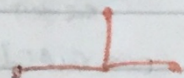
~~En particular~~  
 En particular el método no genera nuevos máximos si  
 la condición CFL se satisface



$\gamma \leq 0$



Opción 3 \*\*\* Esquema numérico con di. p. centradas

Plantilla: 

$$\partial_x U \Big|_{x=x_j, t=t_n} \approx \frac{U(x+\Delta x, t_n) - U(x_j - \Delta x, t_n)}{2\Delta x}$$

$$\approx \frac{U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x}$$

$$U_x \Big|_{x=x_j, t=t_n} = \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} = -a \frac{U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x}$$

$$\Rightarrow U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{a}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})$$

Error de truncamiento

$$E = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} - a \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}$$

taylor

$$= U_t + \frac{U_{tt} \Delta t}{2} + \frac{U_{ttt} \Delta t^2}{3!} + \dots$$

$$- \frac{a}{2\Delta x} \left[ U + U_x \Delta x + \frac{U_{xx} \Delta x^2}{2} + \frac{U_{xxx} \Delta x^3}{3!} + \dots \right. \\ \left. - U + U_x \Delta x - \frac{U_{xx} \Delta x^2}{2} + \frac{U_{xxx} \Delta x^3}{3!} - \dots \right]$$

$$= U_t + a U_x + \frac{U_{tt} \Delta t}{2} + \dots + \frac{a U_{xxx} \Delta x^2}{3!} + \dots$$

$$= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$= \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$$



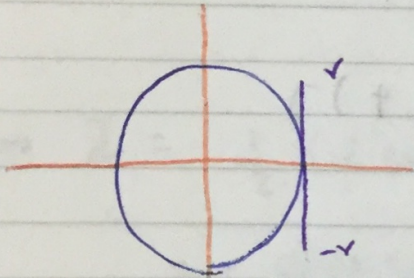
# Estabilidad de Von Neumann

Buscar sols. de la Forma

$$U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j} \Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - \frac{\nu}{2} e^{ikx_j} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$\lambda = 1 - \frac{\nu}{2} (2i \operatorname{sen}(k\Delta x)) = 1 + i\nu \operatorname{sen}(k\Delta x)$$

¿Cuándo  $|\lambda| \leq 1$ ?

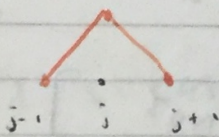


El método es inestable sin importar el número de Courant, excepto en casos triviales.

Se dice que es incondicionalmente inestable

## Método de Lax-Friedrich

Plantilla:



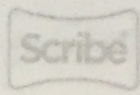
$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} (U_{j-1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)}) - \frac{\nu}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})$$

$U_j^{(n)}$  se reemplaza por el promedio con sus vec-nos

Esto se puede reescribir como

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{\nu}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) + \frac{\Delta x^2}{2} (U_{j-1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j+1}^{(n)})$$

$\approx \frac{\Delta x^2}{2} U_{xx}$  • aproxima un término de viscosidad





El término de corrección/viscosidad ( $\approx \frac{\Delta x^2}{2} U_{xx}$ ) se desaparece si  $\Delta x \rightarrow 0$

Al aumentar la resolución espacial, el término de viscosidad se desvanece

Error

$$E = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} - \frac{a}{2\Delta x} (U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t))$$

$$= \frac{1}{2\Delta t} (U(x + \Delta x) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t))$$

$$= U + \frac{U_{tt} \Delta t^2}{2} + \frac{U_{ttt} \Delta t^3}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{a}{2\Delta x} \left[ 2U_x \Delta x + \frac{2U_{xxx} \Delta x^3}{3!} + \dots \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta t} \left[ U + U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right]$$

$$- 2U + U_x \Delta x + \frac{U_{xx} \Delta x^2}{2} - \frac{U_{xxx} \Delta x^3}{3!} + \dots$$

$$= U + \cancel{aU_x} + \cancel{U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) - \frac{U_{xx} \Delta x^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \dots$$

$$E = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2, \frac{\Delta x^2}{\Delta t})$$

Si  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  a la misma razón

(i.e.  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  y  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  están acotados)

e.g.  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  es cte.

$$\begin{aligned} \dot{\Delta t} &= \mathcal{O}(\Delta x) \\ \dot{\Delta x} &= \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$



En este caso el método es de 1<sup>er</sup> orden tanto en el tiempo como en el espacio

Estabilidad von Neumann

$$U_j^{(n+1)} = \lambda^n e^{ikx_j}$$

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} \frac{1}{2} (e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})$$

$$- \frac{\gamma}{2} \lambda^n e^{ikx_j} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} (2 \cos k\Delta x) - \frac{\gamma}{2} (2i \sin(k\Delta x))$$

$$= \cos(k\Delta x) - i\gamma \sin(k\Delta x)$$

$\lambda$  vive en una elipse con eje horizontal

de  $-1$  a  $1$ , y es vert. de  $-|\gamma|$  a  $|\gamma|$

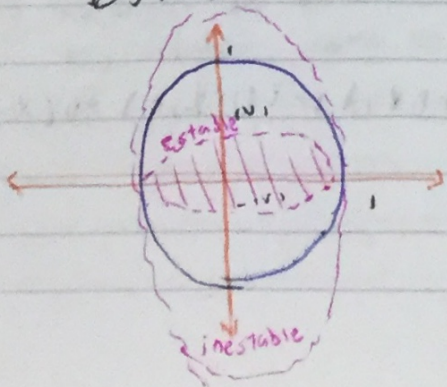
de ancho

$$|\lambda|^2 = \cos^2 k\Delta x + \gamma^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= 1 - \sin^2 k\Delta x + \gamma^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= 1 - \sin^2(k\Delta x)(1 - \gamma^2)$$

$\Rightarrow$  Estabilidad si  $\gamma^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\gamma| \leq 1$



Aquí no importa el signo de  $a$  en  $\gamma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$



El método de Lax - Friedrich es ahora estable,  
pero sigue siendo de primer orden.

¿ Como mejorar la precisión pero mejorar la estabilidad?  
Ideas (Lax y Wendroff)

Taylor Expandir

$$-aU_x \Rightarrow U_{tt} = -aU_{xx} = -a^2 U_{xx}$$

$$U(x, t + \Delta t) \approx U(x, t) + U_t \Delta t + \frac{U_{tt} \Delta t^2}{2} + \dots$$

$$\approx U(x, t) - a \Delta t U_x + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} U_{xx} + \dots$$

Aproximar con diferencias centradas

$$U_x \approx \frac{U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x}, \quad U_{xx} \approx \frac{U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2}$$

⇒ Obtenemos el método de Lax - Wendroff

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{v}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) + \frac{v^2}{2} (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)})$$

Error

$$E = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} [U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)]$$

$$- \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} [U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t)]$$

~~2017~~



$$= U_t + U_{tt} \frac{\Delta t}{2} + U_{ttt} \frac{\Delta t^3}{6} + \dots$$

$$+ \frac{a}{2 \Delta x} \left[ \begin{aligned} & \cancel{U + U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{6} + U_{xxxx} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots} \\ & \oplus U + U_x \Delta x \oplus U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{6} \oplus U_{xxxx} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \end{aligned} \right]$$

$$- \frac{a^2 \Delta t}{2 \Delta x^2} \left[ \begin{aligned} & \cancel{U + U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{6} + U_{xxxx} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots} \\ & \ominus U - U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} - U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{6} + U_{xxxx} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \end{aligned} \right]$$

$$= U_t + a^2 U_{xx} \frac{\Delta t}{2} + U_{ttt} \frac{\Delta t^3}{6} + \dots$$

$$+ \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$+ \frac{a^2 \Delta t}{2} U_{xx} + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2)$$

$$\underline{E = (\Delta x^2, \Delta t^2, \Delta t \Delta x^2) + \dots}$$

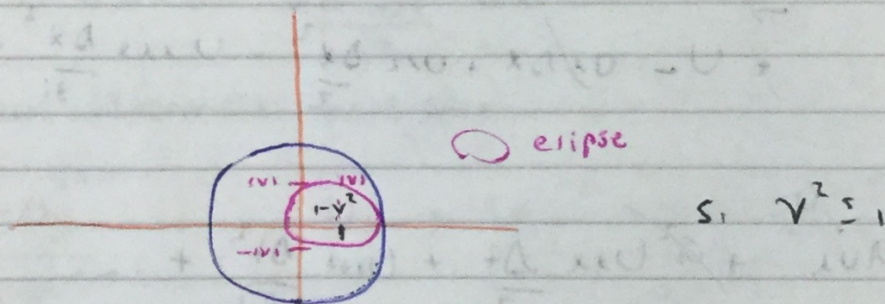
s.  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  van a cero a la misma razón ent.  
 el método de Lax-Wendroff es de 2<sup>o</sup> orden tanto en  
 el tiempo como en el espacio



## Estabilidad

$$e^{iKx_j} \lambda^{n+1} = \lambda^n e^{iKx_j} - \frac{\nu}{2} \lambda^n e^{iKx_j} (e^{iK\Delta x} - e^{-iK\Delta x}) + \frac{\nu^2}{2} \lambda^n e^{iKx_j} (e^{iK\Delta x} - 2 + e^{-iK\Delta x})$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 - \frac{\nu}{2} (2i \sin(K\Delta x)) + \frac{\nu^2}{2} (2 \cos(K\Delta x) - 2) \\ = 1 - \nu^2 (1 - \cos(K\Delta x)) - i\nu \sin(K\Delta x)$$



• Estabilidad si  $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < \nu \leq 1$

Si  $\Delta x > 0$  la ecuación de Wendroff se puede reescribir como

$$U_j^{(n+1)} = \underbrace{U_j^{(n)}}_{\text{dif por la izquierda 1er orden}} - \nu \underbrace{(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)})}_{\text{término de viscosidad corregido de 2º orden y estable}} - \frac{1}{2} \nu (1 - \nu) (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)})$$

— dif por la izquierda  
1er orden

— término de viscosidad  
corregido de 2º  
orden y estable.



## Soluciones débiles de leyes de conservación hiperbólicas

- Ecuación escalar / Ley de conservación escalar hiperbólica  
 $\partial_t U + (F(U))_x = 0$      $U = U(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $F = F(U(x, t))$  Flujo

Para la ecuación del calor vemos  $f = -kU_x$

## Clasificación de ec. dif. parciales de segundo orden (lineales)

$$AU_{xx} + BU_{xt} + CU_{tt} + DU_x + EU_t + F = 0$$

↖ coeficientes constantes y homogéneas

### Clasificación

- $B^2 - 4AC > 0$  Ec. hiperbólica

La información viaja a velocidad finita

Ejemplo: Transporte

$$\partial_t U + aU_x = 0 \Rightarrow$$

$$U_{tt} = \partial_t (-aU_x) = -a\partial_x(U_x)$$

$$= -a\partial_x(-aU_x) = a^2 U_{xx}$$

$$\Rightarrow U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$$

$$\therefore A = -a^2, B = 0, C = 1$$

$$\therefore B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$$

- $B^2 - 4AC < 0$  Ec. Elíptica

Valor en la frontera

Ejemplo  $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U = 0$  — Laplace



- $B^2 - 4AC = 0$  Ec. Parabólica  
La información viaja a velocidad infinita

Ej. Ec. del calor  $U_t - kU_{xx} = 0$

$$A = -k, B = 0, C = 0$$

$$\Rightarrow B^2 - 4AC = 0 \quad (\text{cambia muy rápido})$$

Si  $F = aU$  depende explícitamente de forma lineal en  $U$  (y no de sus derivadas) ent. obtenemos la ec. de transporte, que es de tipo parabólico

Estas ec. hiperbólicas se pueden extender a flujos  $F = F(U)$  pero que la dependencia no es lineal. Por lo tanto una ley de conservación escrita

$$\partial_t + \partial_x F(U) = 0$$

se dice que es de tipo hiperbólico si  $F = F(U)$  depende solo de  $U$  de manera suave

Usando la regla de la cadena

$$\partial_x (F(U(x,t))) = F'(U) \partial_x U$$

Obtenemos la Forma cuasilineal de la ley de conservación.

$$\partial_t U + F'(U) \partial_x U = 0$$

análoga a transporte

$$\partial_t U + a \partial_x U = 0$$



Si definimos  $q(x,t) = F(U(x,t))$  (descartado pues  $U$  no se ha calculado)

$$\Rightarrow \partial_t U + a(x,t) U_x = 0$$

Es como una ecuación de transporte, pero la velocidad de transporte  $a(x,t)$  cambia con la solución

Si  $a$  fuera cte, la EDP sería lineal

$$\partial_t U_1 + a \partial_x U_1 = 0 \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$$\partial_t U_2 + a \partial_x U_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t (a_1 U_1 + a_2 U_2) + a \partial_x (a_1 U_1 + a_2 U_2) \\ = a_1 (\partial_t U_1 + a \partial_x U_1) + a_2 (\partial_t U_2 + a \partial_x U_2) = 0 \end{aligned}$$

Ent. si  $a$  es cte y  $U_1$  y  $U_2$  son sols.

$\Rightarrow$  cualquier combinación lineal tmb lo es

Sin embargo, si  $a = a(U)$  depende de  $U$  y no es cte  $\Rightarrow$  lo anterior no se puede repetir

$$\Rightarrow \text{Si } q = q(U) = F'(U)$$

$\Rightarrow$  La EDP en general no es lineal a menos que  $F' = \text{cte}$   
 $\Leftrightarrow F$  es lineal en  $U$ .

## Método de curvas características

Buscamos curvas  $(x(t), t)$  donde  $U(x(t), t)$  no depende de  $t$ .



$$0 = \frac{d}{dt} (U(x(t), t)) = \partial_t U + \frac{dx}{dt} \partial_x U$$

Por otro lado  $0 = \partial_t + f'(U(x(t), t)) \partial_x U$

Necesitamos

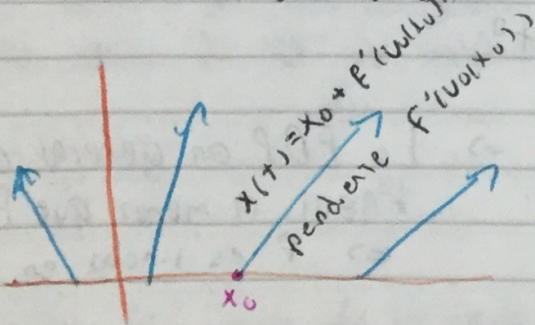
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = f'(U(x(t), t)) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

← EDO de la curva caract.

Notar que  $U(x(t), t) \stackrel{\text{no depende de } t}{=} U(x(0), 0) = U(x_0, 0) = U_0(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(U_0(x_0)) \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + f'(U_0(x_0))t}$$

Entonces las curvas características en este caso son líneas.



Dado  $(x, t)$  encontrar  $x_0$  tal que

$$x_0 + f'(U_0(x_0))t = x \quad (\text{invertir / despejar } x_0)$$

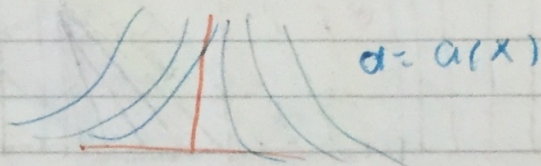
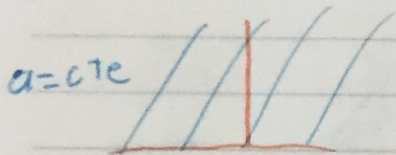
y la solución es simplemente

$$U(x, t) = U_0(x_0)$$



Problema: Las curvas se pueden cruzar

Nota: Esto no ocurre con las lineales antes vistas



Ejemplo: Ecuación de Burgers

Flujo cuadrático

$$F = F(u) = \frac{1}{2} u^2$$

Forma conservativa

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

Forma no lineal

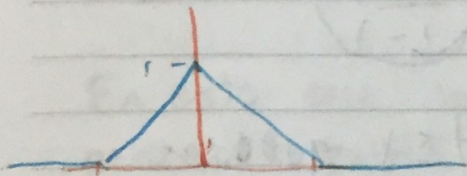
$$\partial_t u + u \partial_x u = 0$$

Resolver es siguiente problema para  $t = 1$

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1+x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Es continua)



Solución

Caso 1  $|x_0| \geq 1 \Rightarrow u_0(x_0) = 0 \Rightarrow F'(u_0(x_0)) = 0$   
 $\Rightarrow x(t) = x_0 + 0 = x_0$

Caso 2  $-1 < x_0 \leq 0 \Rightarrow F'(u_0(x_0)) = u_0(x_0) = 1 + x_0$   
 $x(t) = x_0 + (1 + x_0)t$

Si quisieramos despejar  $x_0$

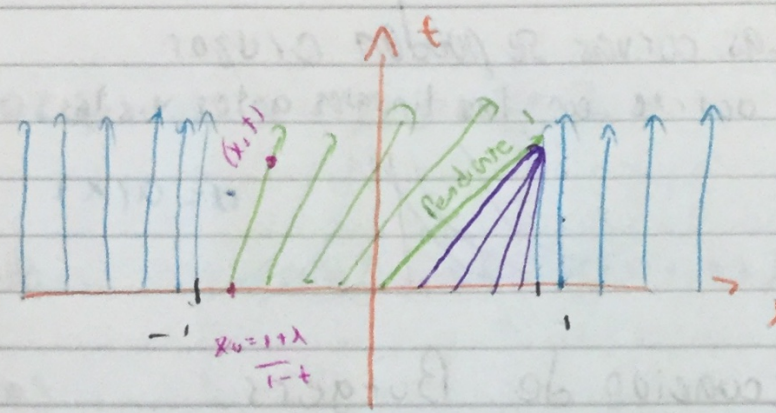
$$x = x_0(1+t) + t \Rightarrow x_0 = \frac{x-t}{1+t} \Rightarrow u(x, t) = u_0(x_0) = 1 + x_0$$

$$= 1 + \frac{x-t}{1+t}$$



función

$$= \frac{1+x}{1-t}$$



Caso 3:  $0 < x_0 \leq 1$

$$U_0(x_0) = 1 - x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + (-x_0)t$$

todas colapsan en  $t=1$

$$\Rightarrow x = x_0(1-t) + t \Rightarrow x_0 = \frac{x-t}{1-t}$$

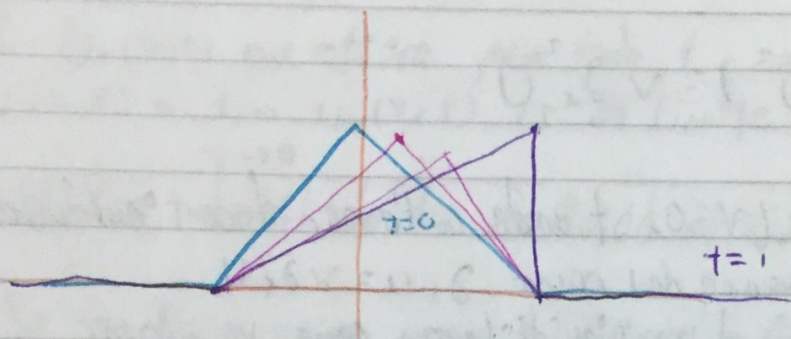
$$U(x,t) = U_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$$

Se nos pide calcular la solución para  $t \leq 1$  que es cuando las curvas se intersecan por primera vez

Para  $t \leq 1$  la solución es la siguiente:

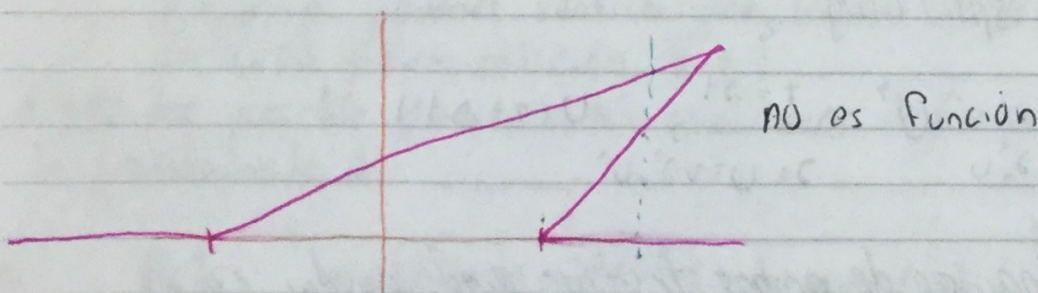
$$U(x,t) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ y } -1 \leq x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \text{ y } t \leq x \leq 1 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$$





Obs: Cuando las curvas se cruzan se puede formar una discontinuidad.

Si le sigo se hace multivaluada



En este caso la solución viaja a velocidad finita pero se empalmó.

24/10/17

Sabemos que las curvas características pueden colisionar en un tiempo finito aún cuando las condiciones sean suaves. (generando entonces una discontinuidad/onda de choque en tiempo finito)

¿Que podemos hacer?

Idea de Oleinik

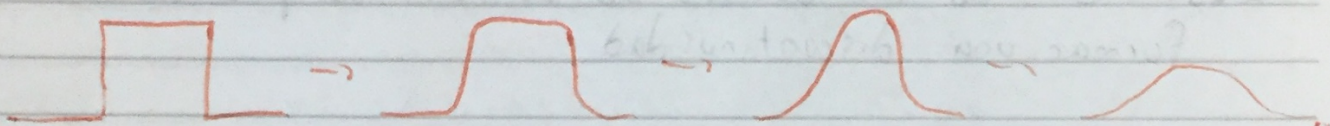
Consideremos la ecuación de Burgers' viscosa



$$\partial_t U + \partial_x \left( \frac{1}{2} U^2 \right) = \nu \partial_x^2 U$$

Burgers no viscosa ( $\nu=0$ ) tiende a formar discontinuidades  
 sin embargo la ecuación del calor  $\partial_t U = \nu \partial_x^2 U$

tiende a suavizar discontinuidades, como ya vimos.



Ec. del calor

Métodos splitting

$$U \xrightarrow[\partial_x U = \partial_x^2 U]{t} U^* \xrightarrow[\partial_t U = \nu \partial_x^2 U^*]{t + \Delta t} U(t + \Delta t)$$

La combinación de ambos términos puede ayudar a evitar el problema teórico que encontramos anteriormente.

En el ejemplo de la clase anterior,  $\partial_t U + \partial_x \left( \frac{1}{2} U^2 \right) = 0$ , solo tenía solución para  $t \leq 1$  (solución "Fuerte").

¿La versión viscosa  $\partial_t U + \partial_x \left( \frac{1}{2} U^2 \right) = \nu \partial_x^2 U$  tendría solución para todo tiempo? Pado que el término viscoso  $\nu \partial_x^2 U$  tiende a suavizar discontinuidades, esto podría ayudar a que la solución exista.

Sin embargo, hay que resolver la versión no viscosa con  $\nu=0$

Estrategia

Sea  $U_\nu(x, t)$  la solución a

$$U_t + \partial_x \left( \frac{1}{2} U_\nu^2 \right) = \nu \partial_x^2 U_\nu$$

$$U_\nu(x, 0) = u(x)$$

Condiciones de frontera (si las hay)



Si  $U(x,t)$  existiera para toda  $t$ , entonces llamaremos a  $U(x,t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} u_\nu(x,t)$  (si el límite existe) la solución débil de la ecuación no viscosa

Se les llama suaves porque la ecuación de Burgers viscosa podría no tener solución - suave que satisfaga la ecuación y la ecuación débil es simplemente un límite.

Se puede ver que si la solución débil es suave, entonces es una solución fuerte.

¿Cómo podemos verificar que la ec. de Burgers viscosa tiene solución  $\forall t$ ?

Esto es posible para ciertas condiciones de frontera usando la transformada de                     

• Dados  $\nu, U(x,t), \varphi(x,t) := \exp\left(-\frac{1}{\nu} \int_{x_0}^x U(x',t) dx'\right)$

ent  $\varphi$  es la transformada de

$$\text{Ent. } \partial_t U + \partial_x \left(\frac{1}{2} U^2\right) = \nu \partial_x^2 U$$

se escribe como

$$\partial_t \varphi = \nu \partial_x^2 \varphi$$

$U$   $\xrightarrow{\text{Transformada de}}$   $\varphi$

Burgers  
viscosa

Calor

$$U_0 \rightarrow \varphi_0 \rightarrow \varphi \rightarrow U$$