TERMINAL IV (SIMULACIÓN) - 2017 - 2. TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 19 de septiembre

Antes de las 10:10 AM 100%

Después de las 10:10 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el problema de difusión del calor en donde la conductividad depende de la variable x, condiciones de frontera Dirichlet y condiciones iniciales de la forma:

$$\begin{cases} \partial u_t & = & \partial_x(k(x)\partial_x u)), 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) & = & 0 \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = 2 & & \text{para todo } t > 0. \end{cases}$$

Aquí la conductividad está dada por:

$$k(x) = 0.1 - 0.09 \exp\left(-(x-1/2)^2/0.01\right),$$

y corresponde a una conductividad que es deficiente en el centro del dominio. Ver figura 2

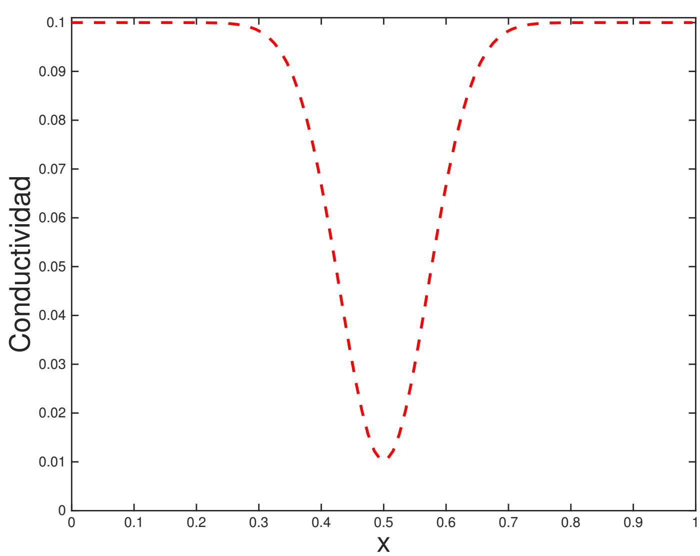

FIGURE 1. Conductividad.

(a) Encuentra las soluciones estacionarias (independientes del tiempo) que satisfacen las mismas condiciones de frontera.

(b) Modificando el código visto en clase, calcula la solución numérica a tiempos $t = 0.1, 1, 10$. Compara la solución a tiempo $t = 10$ con la solución estacionaria de la parte (a) y verifica que se aproximan de manera razonable.

Solución:

La solución estacionaria satisface

$$\partial_x \left(k(x)\partial_x u\right) = 0,$$

con solución

$$u(x) = c_1 \int_0^x \frac{1}{k(x')} dx'.$$

Dadas las condiciones $u(0) = 1, u(1) = 2$, obtenemos $c_2 = 1$ y de manera numérica calculamos $c_1 \approx 0.0584$.

Las soluciones a tiempo $t = 0, 1, 1, 10$, junto con la gráfica de la solución estacionaria se muestra en la siguiente figura:

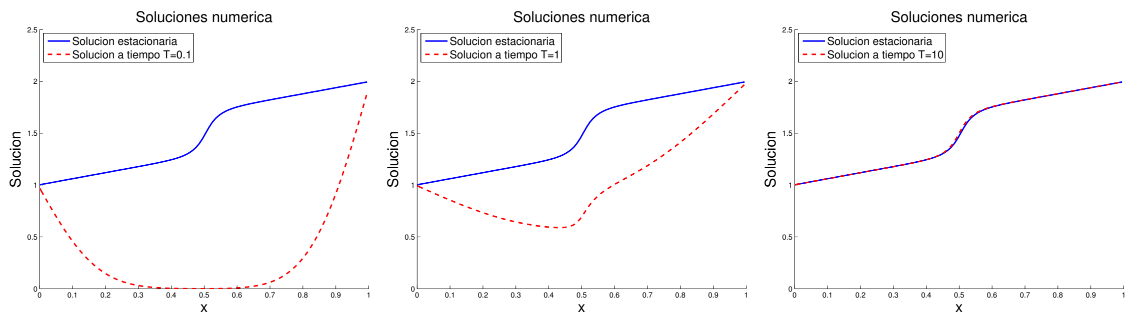

FIGURE 2. Solución a tiempo $t = 0.1, 1, 10$.