TERMINAL IV (SIMULACIÓN) - 2017 - 2. TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 3 de octubre
Antes de las 10:10 AM 100%
Después de las 10:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación del calor en el dominio bi-dimensional $(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ con valores iniciales y de frontera

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \nabla \cdot (\kappa \nabla u), 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, \\ u(x, y, t = 0) & = & 0, \\ u(x = 0, y, t) & = & 1, \\ \partial_x u(x = L_x, y, t) & = & 0, \\ u(x, y = 0, t) & = & 1 - x/L_x, \\ u(x, y = L_y, t) & = & 1 - x/L_x, \end{cases}$$

y conductividad es variable en el espacio

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} & \left(\frac{x - L_x/4}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - L_y/4}{r_y}\right)^2 < 1 \\ 0 & \text{si} & \left(\frac{x - L_x/4}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - 3L_y/4}{r_y}\right)^2 < 1 \\ 0 & \text{si} & \left(\frac{x - L_x/2}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - L_y/2}{r_y}\right)^2 < 1, \\ 1 & & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Aquí el dominio se impone una temperatura en las frontera oeste, norte y sur que va decreciendo de manera lineal con x de 1 a 0 en el extremo izquierdo. En la frontera derecha se impone condiciones de frontera Neumann de tal forma que está aislada por la derecha (frontera este). La conductividad es 1 en todos lados excepto en 3 hoyos, en donde se anula y el calor no puede propagarse ahí. Los radios en la expresión de la conductividad son $r_x = Lx/8, r_y = L_y/8$. El dominio tiene dimensiones $L_x = 10, L_y = 1$.

Usando el código proporcionado en clase, calcula la solución numérica a tiempos $t = 0.001, 0.01, 0.1, 1$. Usa una resolución de $N_x = 100, N_y = 100$. Muestra la gráfica tanto de κ como los contornos de u.
Solución:

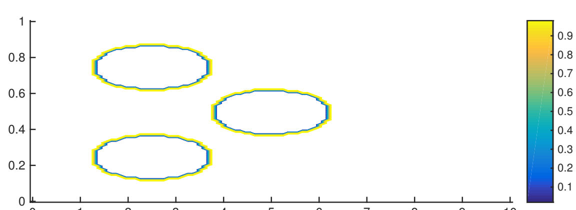

FIGURE 1. Contornos de κ

En la figura 1 se muestran los contornos de la conductividad. El calor debe propagarse de acuerdo a su evolución y condiciones de frontera, pero rodeando los círculos en donde la conductividad se anula.

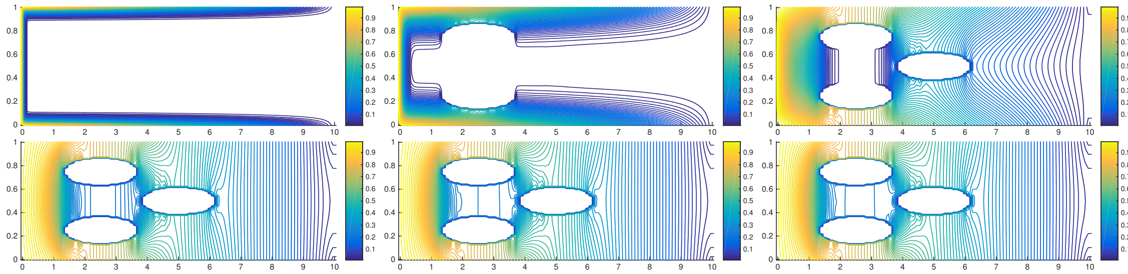

Figure 2. Solución a tiempos $t = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 2$ y $t = 10$

En la figura 2 se muestra la evolución de la propagación del calor en el dominio. Podemos observar que las condiciones de frontera se satisfacen de manera muy precisa. El calor trata de propagarse principalmente de izquierda a derecha, pero rodeando las áreas que son totalmente aisladas en donde la conductividad es cero.