Terminal IV Tarea 8

Problema: Determina el error de truncamiento y condiciones de estabilidad de von Neumann del método de leap frog (salto de rana)

$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n-1)} - \nu\left(u_{j+1}^{(n)} - u_{j-1}^{(n)}\right)$$

R:

$$E = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} + a\,\frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2\Delta t}\left[\begin{array}{l} \cancel{u} + u_t\Delta t + \cancel{u_{tt}\frac{\Delta t^2}{2}} + u_{ttt}\frac{\Delta t^3}{6} + \dots \\ -\cancel{u} + u_t\Delta t - \cancel{u_{tt}\frac{\Delta t^2}{2}} + u_{ttt}\frac{\Delta t^3}{6} + \dots \end{array}\right]$$

$$+ \frac{a}{2\Delta x}\left[\begin{array}{l} \cancel{u} + u_x\Delta x + \cancel{u_{xx}\frac{\Delta x^2}{2}} + u_{xxx}\frac{\Delta x^3}{6} + \dots \\ -\cancel{u} + u_x\Delta x - \cancel{u_{xx}\frac{\Delta x^2}{2}} + u_{xxx}\frac{\Delta x^3}{6} + \dots \end{array}\right]$$

$$= \cancel{u_t} + u_{ttt}\frac{\Delta t^2}{6} + \cancel{a u_x} + a u_{xxx}\frac{\Delta x^2}{6} = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

El método es de segundo orden en el tiempo y en el espacio.

Estabilidad: $u_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j}$ ← Buscar soluciones de esta forma.

$$\Rightarrow \lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^{n-1} e^{ikx_j} - \nu\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}\right)$$

Dividiendo entre $\lambda^{n-1}e^{ikx_j}$ obtenemos:

$$\lambda^2 = 1 - \nu\lambda\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right) = 1 - \nu\lambda\left(2i\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2i\nu\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2i\nu\,\mathrm{sen}(k\Delta x) \pm \sqrt{-4\nu^2\mathrm{sen}^2(k\Delta x) - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}$$

$$= \frac{-2i\nu\,\text{sen}(k\Delta x) \pm \sqrt{4 - 4\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)}}{2} = \pm\sqrt{1-\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)} \;\cancel{\pm} - i\nu\,\text{sen}(k\Delta x)$$

Si $|\nu| \leq 1 \Rightarrow \nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x) \leq 1$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 - \nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x) + \nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x) = 1 \Rightarrow$ Es neutralmente estable.

Si $\cancel{\nu^2\,\text{sen}}$ $\cancel{|\nu|^2}$ $\nu^2 > 1 \Rightarrow 1 - \nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)$ es negativa para algunos valores de $k\Delta x$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = \left(\sqrt{\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)-1} \pm \nu\,\text{sen}(k\Delta x)\right)^2$$

$$= \underbrace{\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x) - 1}_{\geq 0} \underbrace{\pm 2\sqrt{\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)-1}\;\nu\,\text{sen}(k\Delta x)}_{\text{cualquier signo}} + \underbrace{\nu^2\,\text{sen}^2(k\Delta x)}_{\geq 1}$$

$\Rightarrow$ Hay estabilidad neutral si $|\nu| \leq 1$.