Análisis Real

2017

Examen 1

Problema 1: Demostrar que todo espacio X compacto y Hausdorff es normal. Esto es, dados disjuntos $\overset{\text{cerrados}}{\wedge}$ C y D existen abiertos U y V tal que $C \subset U$ y $D \subset V$.

Dem: Como $C, D \subset X$ son compactos y X compacto y Hausdorff

$\Rightarrow C, D$ son ~~cerrados~~ compactos.

Sea $x \in X \setminus C$ fijo

$\forall c \in C$ $\exists$ U_c y V_c abiertos disjuntos t.q. $c \in U_c$, $x \in V_x$

$\{U_c\}$ es cubierta de C $\Rightarrow$ existe cubierta finita

$\Rightarrow \bigcup_{c=1}^{n} U_c \supset C$ y $\bigcap_{c=1}^{n} V_c \ni x$

$\Rightarrow C$ y x se pueden separar.

$\forall x \in D$ $\exists$ $U_x \supset C$ $\quad x \in V_x \quad U_x \cap V_x = \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ colección finita $V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$

$\Rightarrow U = \bigcap U_{x_j} \qquad V = \bigcup V_{x_j}$.

Problema 2:

(a) Sean $\{C_n\}$ subconjuntos conexos y compactos de un espacio de Hausdorff tales que $C_{n+1} \subset C_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es conexo.

Dem: Vamos a demostrar que si $\bigcap C_n \subset W$ W abierto
$\Rightarrow \exists n$ t.q. $C_n \subset W$ y el problema es equivalente.

Supongamos $\exists \{x_n\}$ t.q. $x_n \in C_n$ y $x_n \notin W$.

$\{x_n\} \subset C_1$ y C_1 es compacto

$\Rightarrow$ Tiene un punto de acumulación en un punto x en C_1 (en sentido topológico).
i.e. tiene una subsucesión convergente a un punto x en C_1.

Claramente $x \notin W$ pues W es abierto.

P.d. $x \in \bigcap C_n$

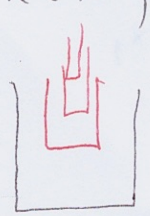
Si $\exists m$ t.q. $x \notin C_m \Rightarrow x \in X \setminus C_m \Rightarrow \exists\, n > m$ t.q. $x_n \in X \setminus C_m$

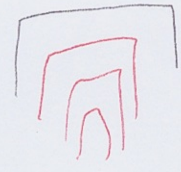
$\Rightarrow x_n \notin C_m \subset C_n$ ∇.

$\therefore \bigcap C_n \subset W$.

(b) Dar una familia de subconjuntos conexos cerrados $C_n \subset \mathbb{R}^2$ t.q. $C_{n+1} \subset C_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pero donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ no sea conexo.

Respuesta:





Problema 3: Un espacio métrico (S,d) se llama ultramétrico y d una ultramétrica si $d(x,y) \le \max(d(x,z), d(y,z))$ para todo $x, y,$ y z en S. Algunas veces a estas métricas se les conoce como no-arquimedianas. Ejemplos incluyen métricas discretas, números p-ádicos, entre otros y tienen muchas aplicaciones. Muestra que en un espacio ultramétrico, cualquier bola abierta $B(x,r)$ es un conjunto cerrado.

Dem: P.d. $S \setminus B(x,r)$ es abierta. $(r>0)$

Sea $y \in S \setminus B(x,r) \Rightarrow d(y,x) \ge r$

P.d. $B(y, r/2) \subset S \setminus B(x,r)$

Sea $z \in B(y, r/2) \Rightarrow d(z,y) \le r/2$

$\Rightarrow d(y,x) \le \max(d(z,y), d(z,x))$

$\Rightarrow \max(d(x,z), d(z,y)) \ge r$ pues $d(z,y) \le r/2$

Entonces el máximo debe ser $d(x,z)$

$\Rightarrow d(x,z) \ge r \Rightarrow z \in S \setminus B(x,r)$

$\therefore B(y, r/2) \subset S \setminus B(x,r)$

$\therefore B(x,r)$ es un conjunto cerrado.

Problema 4: Muestra que cualquier subconjunto de un espacio métrico separable también es separable con la topología relativa.

Sea X espacio separable y $Y \subset X$.

Sea $\{x_n\}$ un conjunto denso numerable en X

Se puede entonces construir una base contable $\{B(x_n, r=\frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow Y$ con la topología relativa tiene una base contable.
Por el axioma de elección, podemos escoger un elemento de cada elemento no vacío de la base contable en Y.
Esta ~~su~~ nueva sucesión forma un conjunto denso en Y.

—— o ——

Problema 5: Sea $f: X \to Y$ una función entre 2 espacios topológicos. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es continua

(b) $\forall C$ cerrado de Y, $f^{-1}(C)$ es cerrado en X.

(c) $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(d) $\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

(e) $\forall B \subset Y$, $f^{-1}(\text{int}(B)) \subset \text{int}(f^{-1}(B))$

Dem: (a) $\Rightarrow$ (b)] C cerrado $\Rightarrow C^c = Y \setminus C$ es abierto
y $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ es abierto por ser f cont.
$\Rightarrow f^{-1}(C)$ cerrado.

(b) $\Rightarrow$ (c) : $\overline{f(A)}$ es cerrado $\Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado pero $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$
$\Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Por (c), $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

(d) $\Rightarrow$ (e) $\text{int}(B) = Y \setminus \overline{(Y \setminus B)}$ y por (d) tenemos
$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \Rightarrow X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus (\overline{f^{-1}(Y \setminus B)})$
$= X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(B))}$
$= \text{int}(f^{-1}(B))$
$\Rightarrow X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset \text{int}(f^{-1}(B))$
$\quad \shortparallel$
$f^{-1}(Y \setminus \overline{(Y \setminus B)})$ $\therefore f^{-1}(\text{int } B) \subset \text{int}(f^{-1}(B))$

(e) $\Rightarrow$ (a) Sea B abierto. Por (e) $f^{-1}(B) \subset \text{int}(f^{-1}(B))$
$\Rightarrow f^{-1}(B) = \text{int}(f^{-1}(B))$
$\therefore f^{-1}(B)$ es abierto.