Análisis Real Examen 2 1030.1 2017

Problema 1: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sean $\{f_n\}$, f funciones medibles. Se dice que $\{f_n\}$ converge en medida μ en D a f $(f_n \xrightarrow{\mu} f)$ si para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

(a) Muestra que la condición $\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\} = 0$ implica que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en D.

R: Para cada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$E_{n,\varepsilon} = \{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, $F_n = \{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\}$

$E_{n,\varepsilon} \subset F_n$ $\forall\, \varepsilon, n$ y son medibles

$\Rightarrow$ $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \mu(F_n)$, y además $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$ por hipótesis

$\therefore \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0$

(b) Muestra que la implicación conversa no es cierta.

Sean $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = 0$, $x \in [0,1]$

$f_n \to f$ puntualmente en $[0,1]$, y además

$$E_{n,\varepsilon} = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{n} \geq \varepsilon\} = \begin{cases} [0,1] & \text{si } n < 1/\varepsilon \\ \emptyset & \text{si } n > 1/\varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Sin embargo, $F_n = \{x \in [0,1] : \frac{1}{n} > 0\} = [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 1 \neq 0$.

(c) Muestra que la condición en (a) implica que para μ-c.t.p. $x \in D$ tenemos $f_n(x) = f(x)$ para un número infinito de índices $n \in \mathbb{N}$.

R: Sea $G_n = \{x \in D : f_n(x) \neq f(x)\}$. medible

~~Sea~~ Notemos que $\lim_{n\to\infty} \inf \chi_{G_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \{\inf_{m \geq n} \chi_{G_m}(x)\}$

$= \cancel{\lim_{n\to\infty}\inf \chi_{G}} = \chi_{G'}$ donde $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} G_k$.

Dado que $G_n = \{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n) = 0$ por hipótesis

Por el lema de Fatou tenemos que

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} \inf \chi_{G_n}\right) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int (\chi_{G_n})\, d\mu$$

$$\Rightarrow \mu(G) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu(G_n) = 0$$

$\therefore \mu(G) = 0$

Además, $x \notin G$ si $x \notin G_n$ para un número infinito de n's.

i.e., si $f_n(x) = f(x)$ μ-c.t.p. $x \in D$ para un número infinito de n's.

Problema 2: Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones medibles real-valuadas no-negativas en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$ μ-c.t.p. en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu < \infty$

Muestra que para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

R: Sea $g_n = f_n - f_n \chi_E \geq 0$ (para cada $n \in \mathbb{N}$).

Tenemos $f_n \to f$ μ c.t.p. $\Rightarrow g_n \to f - f\chi_E$ μ c.t.p.

Por el lema de Fatou tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (f - f\chi_E)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n - f_n\chi_E \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu - \int_E f_n d\mu \right) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

$$\Rightarrow \int_E f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Sea $h_n := f_n + f_n\chi_E$ para $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow h_n \to f + f\chi_E$ μ c.t.p.

Similarmente

$$\int_{\mathbb{R}} (f + f\chi_E)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n + f_n\chi_E \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \int_E f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

$$\therefore \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Problema 3: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sea $\{f_n\}$ y f funciones medibles y real valuadas μ-c.t.p. en D. Supongamos que existe una sucesión de números reales positivos $\{\varepsilon_n\}$ tales que

(1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$

(2) $\int_D |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Muestra que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f μ-c.t.p. en D.

Nota: No se supone integrabilidad de f_n, f, $|f|$.

R: La sucesión $\sum_{n=1}^{N} |f_n - f|$ es creciente, no negativas y medibles.

Por el teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\int_D \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_n - f| \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_D \sum_{n=1}^{N} |f_n - f| \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_D |f_n - f| \, d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_n(x) - f(x)| < \infty \quad \mu$-c.t.p. $x \in D$.

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \mu$-c.t.p. $x \in D$.

$\therefore f_n \to f \quad \mu$-c.t.p. en D.

Problema 4: Sea X un conjunto no numerable, y sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ la σ-álgebra de subconjuntos de X definida por: $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si A es numerable o $X \setminus A$ es numerable. Sea $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ la medida respectiva que cuenta. Sea λ la medida en $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) = 0$ si A es numerable y $\lambda(A) = \infty$ si A no lo es. Muestra que $\lambda \ll \mu$, es decir, λ es absolutamente continua con respecto a μ, pero la conclusión del teorema de Radón-Nikodym no es válida.

R: Primero demostraremos que $\lambda \ll \mu$.

Sea A $\ni$: $\mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$, pues si $\exists x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A$

$\Rightarrow 1 = \mu(\{x\}) \le \mu(A) \underset{0}{\nabla}$

$\therefore A = \emptyset \Rightarrow \lambda(\emptyset) = 0$ pues $\emptyset$ es contable

$\therefore \lambda \ll \mu$.

Supongamos que la conclusión de Radon-Nikodym es válida

$\Rightarrow \exists h \in L^1(\mu)$ t.q. $\lambda(E) = \int_E h \, d\mu \quad \forall E$ medible.

Para $x \in X$, $\{x\}$ es contable y por tanto medible.

$\Rightarrow 0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} h \, d\mu = h(x)\mu(\{x\}) = h(x)$

$\Rightarrow h \equiv 0 \quad \Rightarrow \lambda \equiv 0$

Sin embargo, $\lambda(X) = \infty$ pues X es no-numerable. ¡!

$\therefore \lambda \ll \mu$ y no se satisface la condusión del teorema.

<u>Problema 5</u>: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medible real-valuadas e integrables en $D \in \mathcal{A}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu \text{ c.t.p. en } D$$

(a) Muestra que si $\lim_{n\to\infty} \int_D |f| \, d\mu = \int_D |f| \, d\mu$, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu = \int_D f \, d\mu$.

<u>Sugerencia</u>: Aplica la extensión de convergencia dominada escrito en el siguiente problema para $g_n = 2(|f_n| + |f|)$, $h_n = |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

<u>R</u>: Tenemos que $h_n \to 0$ μ c.t.p. en D y $g_n = 4|f|$ μ c.t.p. en D.

Por otro lado, $|h_n| = h_n \leq 2|f_n|$ pues $|f| \leq |f_n - f| + |f_n|$

$$|f_n - f| + |f_n| - |f| \leq |f_n| + |f| + |f_n| - |f| = 2|f_n|$$

y

Además $g_n \geq 2|f_n| \Rightarrow h_n \leq 2|f_n| \leq g_n$

y $\lim_{n\to\infty} \int_D g_n \, d\mu = 2 \lim_{n\to\infty} \int_D |f_n| \, d\mu + 2\int_D |f| \, d\mu = \int_D 4|f| \, d\mu.$

Por el teorema de convergencia dominada extendida tenemos que $\lim_{n\to\infty}\int_D h_n\,d\mu = \int_D h\,d\mu = 0 \quad (h=0)$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_D |f_n - f|\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_D |f_n|\,d\mu - \int_D |f|\,d\mu = 0$$

Pero $\lim_{n\to\infty}\int_D |f_n|\,d\mu = \int_D |f|\,d\mu$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_D |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Pero además $\left|\int_D f_n\,d\mu - \int_D f\,d\mu\right| \le \int_D |f_n - f|\,d\mu$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_D f_n\,d\mu = \int_D f\,d\mu.$$

(b) Muestra que el converso de la parte (a) es falso construyendo un contra-ejemplo.

Sea $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \le x < 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \le x \le 1 - 1/n \\ -n & \text{si } -1/n < x \le 1. \end{cases}$

$|f_n|(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \le x < 1/n \text{ ó } 1 - 1/n < x \le 1. \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$

$\Rightarrow f_n \to 0 = f$ y $\int_{[0,1]} f_n\,d\mu = 0 = \int_{[0,1]} 0\,d\mu$ por simetría

Sin embargo, $\int_{[0,1]} |f_n|\,d\mu = 2 \to 2 \neq 0 = \int f\,d\mu$

$\therefore$ Para este contraejemplo $\lim_{n\to\infty}\int_D f_n\,d\mu = \int_D f\,d\mu$ pero $\int_D |f_n|\,d\mu \neq \int_D |f|\,d\mu$.

<u>Bono</u> Extensión del teorema de convergencia dominada.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f, g funciones medible real-valuadas. Sea $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Supongamos que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ μ - c.t.p. en D.

(b) $\{g_n\}$ y g son integrables en D y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_D g_n \, d\mu = \int_D g \, d\mu$.

(c) $|f_n| \leq g$ en D $\forall n \in \mathbb{N}$

Demuestra que f es integrable en D y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu = \int_D f \, d\mu$.

<u>R:</u> Consideremos la sucesión $g_n - f_n$.

$$|f_n| \leq g_n \Rightarrow g_n - f_n \geq 0$$ y son medibles.

Por el lema de Fatou tenemos

$$\int_D \liminf_{n\to\infty} (g_n - f_n) d\mu \leq \liminf \int_D (g_n - f_n) d\mu$$

$$\int_D \lim_{n\to\infty} (g_n - f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_D g_n \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu$$

$$\int_D g \, d\mu - \int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_D f \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu, \text{ pues } \int_D g \, d\mu < \infty.$$

Repitiendo el proceso para $g_n + f_n$ obtenemos

$$\int_D f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mu = \int_D f \, d\mu$$

Como $|f_n| \leq g_n \Rightarrow \int_D f_n \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu < \infty \Rightarrow \int_D f \, d\mu < \infty$.