# Tarea 1
# Análisis real I

Alumno: Gyivan Erick López Campos
Profesor: Dr. Gerardo Hernández Dueñas

20 de agosto de 2017

**Problema 1:**

Veamos primero que:

$$\begin{aligned} A_{11} \cap A_{12} &= \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\right\} \text{ y} \\ A_{21} \cap A_{22} &= \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\right\} \end{aligned}$$

Entonces como $B = (A_{11} \cap A_{12}) \cup (A_{21} \cap A_{22})$ tenemos que:

$$B = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \,\text{o}\, x = 1\right\}$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} A_{11} \cup A_{21} &= \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\, 1] \;\text{ o } y \in [0,\, 1]\right\} \text{ y} \\ A_{12} \cup A_{22} &= \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,\, 2] \;\text{ o } y \in [1,\, 2]\right\} \end{aligned}$$

Entonces como $C = (A_{11} \cup A_{21}) \cap (A_{12} \cup A_{22})$ tenemos que:

$$C = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \;\text{ o }\; y = 1 \;\text{ o }\; (x \in [0,\, 1] \text{ y } y \in [1,\, 2]) \;\text{ o }\; (y \in [0,\, 1] \text{ y } x \in [1,\, 2])\right\}$$

Luego podemos ver que cualquier elemento $(x_0,\, y_0) \in B$ debe de tener $x_0 = 1$ o $y_0 = 1$, por lo que $(x_0,\, y_0) \in C$. Por lo tanto $B \subset C$.

Sin embargo, $C \nsubseteq B$ pues $(0, 2) \in C$ pero $(0, 2) \notin B$.

**Problema 2:**

Claramente $f\,(x)$ no es suprayectiva en $\mathbb{R}$ como codominio, para todo intervalo pues la función $\sin x$ solo toma valores en el intervalo $[-1,\, 1]$. Entonces en los siguientes ejercicios se tomará como dominio el intervalo $[-1,\, 1]$

(a) En el intervalo $[-2,\,2]$ $f$ no es inyectiva pues por definición de la función $\sin x$ podemos probar que $\sin x$ es inyectiva en el intervalo $(-\pi,\,\pi)$ y como $[-2,\,2]\subset(-\pi,\,\pi)$, entonces $f$ es inyectiva. Vemos que $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]\subset[-2,\,2]$ y $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ y como $f$ es continua en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$ , por el teorema del valor intermedio $f$ toma todos los valores en el intervalo $[-1,\,1]$. Por lo tanto $f$ es suprayectiva en $[-2,\,2]$ .

(b) En el intervalo $[0,1]$ $f$ es inyectiva siguiendo el mismo razonamiento que en $(a)$. Pero no es suprayectiva porque no existe $x\in[0,\,1]$ tal que $f(x)=-1$ pues $f(x)=-1$ si y solo si $x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$, con $n\in\mathbb{Z}$.

(c) En el intervalo $[-1,\,1]$ $f$ es inyectiva siguiendo el mismo razonamiento que en $(a)$. Pero no es suprayectiva porque no existe $x\in[-1,\,1]$ tal que $f(x)=-1$ pues $f(x)=-1$ si y solo si $x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$, con $n\in\mathbb{Z}$.

(d) En el intervalo $[-\pi,\,\pi]$ $f$ no es inyectiva pues $f(-\pi)=f(\pi)=f(0)=0$, pero es suprayectiva pues $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]\subset[-\pi,\,\pi]$ y $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ y como $f$ es continua en el intervalo $[-\pi,\,\pi]$ , por el teorema del valor intermedio $f$ toma todos los valores en el intervalo $[-1,\,1]$. Por lo tanto $f$ es suprayectiva en $[-\pi,\,\pi]$ .

**Problema 3:**

Recordemos que para todo polinomio $a_nx^n$, el $\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Probemos entonces que para todo polinomio $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, si

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}a_nx^n &\to \pm\infty\\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 &\to \pm\infty\end{aligned}$$

y si

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}a_nx^n &\to \pm\infty\\ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 &\to \pm\infty\end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital $n$ veces tenemos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{n!a_n}{n!a_n}=1 \tag{1}$$

Por lo que ambos casos deben cumplirse para que se cumpla (1).

Ahora tomemos un polinomio $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, con $n$ impar y $a_n\neq 0$.

Si $a_n<0$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}a_nx^n &\to -\infty \text{ y}\\ \lim_{x\to-\infty}a_nx^n &\to \infty\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{x\to\infty}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \to -\infty \tag{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \to \infty \tag{3}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$, entonces por (2) existe $x_1$ tal que $y < x_1$ tal que $y > f(x_1)$ y por (2) existe $x_2$ tal que $y > x_2$ tal que $y < f(x_2)$. Luego como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [x_2, x_1]$ tal que $f(x_0) = y$. Por lo tanto, la imagen de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

Análogamente, Si $a_n > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} a_n x^n &\to \infty \text{ y} \\
\lim_{x\to-\infty} a_n x^n &\to -\infty
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \to \infty \tag{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \to -\infty \tag{5}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$, entonces por (4) existe $x_1$ tal que $y < x_1$ tal que $y < f(x_1)$ y por (5) existe $x_2$ tal que $y > x_2$ tal que $y > f(x_2)$. Luego como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = y$.

Por lo tanto, la imagen de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$ si $n$ es impar.

Ahora si $n$ es par y $a_n \neq 0$, tenemos dos casos nuevamente.

Si $a_n < 0$ entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \to -\infty$$

Por lo que

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \to -\infty \tag{6}$$

Como $f(x)$ es continua, entonces por (6) existe $x_1$ tal que $f(x_1) \geq f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces el rango de $f$ es subconjunto de $(-\infty, f(x_1)]$. Sea $y \in (-\infty, f(x_1)]$, si $y < f(x_1)$ tenemos 3 casos:

- Si $y < x_1$, entonces existe $x_2 < y$ tal que $f(x_2) < y$ por (6), luego por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_2, x_1)$ tal que $f(x_0) = y$.
- Si $y > x_1$, entonces existe $x_2 > y$ tal que $f(x_2) < y$ por (6), luego por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = y$.
- Si $y = x_1$, entonces para $x_2 < y$ y $x_3 > y$, $f(x_1)$ es mínimo absoluto en el intervalo $[x_2, x_3]$ y como $f$ es continua, entonces por uno de los tres teorema fuertes existe $x_0 \in [x_2, x_3]$ tal que $f(x_0) = y$.

Por lo tanto, $(-\infty, f(x_1)]$ es subconjunto del rango de $f$.

Análogamente Si $a_n > 0$ entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \quad \to \quad \infty$$

Por lo que

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \to \quad \infty \tag{7}$$

Como $f(x)$ es continua, entonces por (7) existe $x_1$ tal que $f(x_1) \leq f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces el rango de $f$ es subconjunto de $[f(x_1), \infty)$. Sea $y \in [f(x_1), \infty)$, si $y > f(x_1)$ tenemos 3 casos:

- Si $y < x_1$, entonces existe $x_2 < y$ tal que $f(x_2) > y$ por (7), luego por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_2, x_1)$ tal que $f(x_0) = y$.
- Si $y > x_1$, entonces existe $x_2 > y$ tal que $f(x_2) > y$ por (7), luego por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = y$.
- Si $y = x_1$, entonces para $x_2 < y$ y $x_3 > y$, $f(x_1)$ es mínimo absoluto en el intervalo $[x_2, x_3]$ y como $f$ es continua, entonces por uno de los tres teorema fuertes existe $x_0 \in [x_2, x_3]$ tal que $f(x_0) = y$.

Por lo tanto, $[f(x_1), \infty)$ es subconjunto del rango de $f$, concluyendo que todo polinomio de grado par tiene una linea media cerrada como rango. $\square$

**Problema 4:**

Probemos primero que si $A$ y $B$ tienen un orden lineal, $A \times B$ tiene un orden lineal.

Sean $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A \times B$. Supongamos que $\langle a, b\rangle \neq \langle c, d\rangle$. Si $\langle a, b\rangle \nleq \langle c, d\rangle$, entonces como $A$ y $B$ tienen ordenes lineales, $c \leq a$ y ($a \neq c$ o $d < b$). Si $a \neq c$ entonces $c < a$, pues $A$ tiene orden lineal, por lo que $\langle c, d\rangle \leq \langle a, b\rangle$, si $c = a$, entonces $d < b$ por lo que $\langle c, d\rangle \leq \langle a, b\rangle$.

Ahora si $\langle c, d\rangle \nleq \langle a, b\rangle$, entonces como $A$ y $B$ tienen ordenes lineales, $a \leq c$ y ($a \neq c$ o $b < d$). Si $a \neq c$ entonces $a < c$, pues $A$ tiene orden lineal, por lo que $\langle a, b\rangle \leq \langle c, d\rangle$, si $c = a$, entonces $b < d$ por lo que $\langle a, b\rangle \leq \langle c, d\rangle$.

Luego $A \times B$ tiene un orden lineal.

Probemos ahora que si $A$ y $B$ están bien ordenados, entonces $A \times B$ está bien ordenado.

Sea $C \subset A \times B$, tal que $C \neq \emptyset$. Como $C \subset A \times B$ entonces existen subconjunto no vacíos $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$ tal que $A_1 \times B_1 = C$. Como $A$ y $B$ están bien ordenados, entonces existen $a_1 \in A_1$ y $b_1 \in B$ tal que para toda $x \in A_1$ y $y \in B_1$, $a_1 \leq x$ y $b_1 \leq y$.

Veamos que $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle x, y\rangle$, para toda $x \in A_1$ y $y \in B_1$. Si $a_1 = x$ entonces $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle x, y\rangle$ si $b_1 < y$ y $\langle a_1, b_1\rangle = \langle x, y\rangle$ si $b_1 = y$. Por último si $a_1 < x$ entonces $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle x, y\rangle$. Por lo que $C$ tiene un mínimo, lo que implica que $A \times B$ está bien ordenado. $\square$

**Problema 5:**

- $\langle x, y\rangle E \langle u, v\rangle$ si y solo si $x + y = u + v$. Esta relación es de equivalencia pues es reflexiva, $\langle x, y\rangle E \langle x, y\rangle$ pues $x + y = x + y$, es simétrica, si $\langle x, y\rangle E \langle u, v\rangle$ entonces $x + y = u + v$, así que $u + v = x + y$, por lo que $\langle u, v\rangle E \langle x, y\rangle$ y es transitiva pues si $\langle x, y\rangle E \langle u, v\rangle$ y $\langle u, v\rangle E \langle w, z\rangle$, entonces $x+y = u+v = w+z$, así que $\langle x, y\rangle E \langle w, z\rangle$. Y no es un orden de ningún tipo porque no se cumple la antisimetría.
- $\langle x, y\rangle F \langle u, v\rangle$ si y solo si $x+y \leq u+v$. Esta relación no es un orden parcial, pues no es antisimétrica ya que $\langle 1, 2\rangle F \langle 6, -3\rangle$ y $\langle 6, -3\rangle F \langle 1, 2\rangle$, pero $\langle 1, 2\rangle \neq \langle 6, -3\rangle$, por lo que no es un orden lineal. Además tampoco es simétrica pues $\langle 1, 2\rangle F \langle 3, 3\rangle$ no al revés.
- $\langle x, y\rangle G \langle u, v\rangle$ si y solo si $x + u \leq y + v$. Esta relación no es transitiva pues $\langle 1, 1\rangle G \langle 1, 5\rangle$ y $\langle 1, 5\rangle G \langle 1, -1\rangle$, pero es falso que $\langle 1, 1\rangle G \langle 1, -1\rangle$. Por lo tanto, no es una relación de equivalencia ni un orden parcial ni lineal.

**Problema 6:**

Demostración:

Si $X = \emptyset$ claramente no existe $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva, entonces supongamos que $X \neq \emptyset$.

Sea $j \in X$, definimos $P_j := \{x \in X : j < x\}$ y también definimos $x_P \in P \subset X$ tal que $x_P \leq x$ para toda $x \in P$ y $x^P \in P \subset X$ tal que $x \leq x_P$ para toda $x \in P$ . Notemos que como $(X, \leq)$ y $(X, \geq)$ están bien ordenados, entonces para cada $P \subset X$, $x_P$ y $x^P$ existen y son únicos. Definiendo la función $h : \mathbb{N} \times X \to X$ como:

$$h(n, y) \quad = \quad \begin{cases} x_{P_y} & \text{si } y \neq x^X \\ x^X & \text{si } y = x^X \end{cases}$$

por el principio de regresión existe $g : \mathbb{N} \to X$ tal que $g(n+1) = h(n, g(n))$ y $g(0) = x_X$.

Probemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que $g(n) \neq x^X$, $g(n) < g(n+1)$ . Veamos que $P_{g(n)} \neq \emptyset$ pues al menos $x^X \in P_{g(n)}$. Por definición recordemos que para toda $x \in P_{g(n)}$, $g(n) < x$, como existe $x_{P_{g(n)}} \in P_{g(n)}$, entonces $g(n) < x_{P_{g(n)}} = g(n+1)$. (1)

Si no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = x^X$, entonces el rango de $g$ no tendría un máximo pues si suponemos que $g(m)$ es el máximo del rango de $g$ y $g(m) \neq x^X$, entonces por (1), $g(m) < g(m+1)$, contradicción. Pero el hecho de que el rango de $g$ no tenga un elemento máximo es una contradicción con que $(X, \geq)$ está bien ordenado.

Entonces debe existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $g(n) = x^X$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar el $n$ más pequeño que cumple esto.

Si $x_X = x^X$, entonces la cardinalidad de $X$ es 1, por lo que no existe $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva.

Supongamos que $x_X < x^X$. Sea $y \in X$, como $g(0) = x_X$ y $g(n) = x^X$, entonces podemos tomar $m \in \{i\}_{i=0}^{n-1}$ más grande tal que $g(m) \leq y \leq g(m+1)$, ya que al menos $m$ puede ser 0 y a lo más va a ser $n-1$. Si $g(m) < y$, entonces $y \in P_{g(m)}$ y además $y \leq g(m+1) = x_{P_{g(m)}}$, por lo que $y = x_{P_{g(m)}} = g(m+1)$. Así $g\restriction \{i\}_{i=0}^{n}$ es suprayectiva. (2)

Luego por (1) y (2), $g\restriction \{i\}_{i=0}^{n}$ es biyectiva, lo cual implica que $X$ tiene cardinalidad finita, por lo que no puede existir $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva. $\square$

**Problema 7:**

Para demostrar el problema 7 demostraremos dos lemas.

**Lema 1:** *Unión contable de conjuntos contables es contable.*

Demostración:

Primero demostremos que si tenemos un conjunto $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos contables, entonces $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ es contable. Sea $f_n : \mathbb{N} \to S_n$ la función suprayectiva que existe gracias a que cada $S_n$ es contable. Sea $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to S$ definida como $g(i, j) = f_i(j)$. Claramente $g$ es suprayectiva pues para $x \in S_i$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(m) = x$, entonces $g(i, m) = x$.

Como ya vimos en clase, existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ biyectiva entonces $h \circ g : \mathbb{N} \to S$ es suprayectiva pues es composición de funciones suprayectivas. Luego $S$ es contable. $\square$

**Lema 2:** *Si $X$ es un conjunto contable infinito, entonces $X$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.*

Demostración:

Como $X$ es contable, entonces existe $f : \mathbb{N} \to X$ suprayectiva. Definamos para cada $x \in X$ su pre-imagen $I(x) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\}$. Como $f$ es suprayectiva, $I(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$, entonces por el axioma de elección, podemos tomar un elemento $n_x \in I(x)$ para cada $x \in X$. Sea $J = \bigcup_{x\in X} \{n_x\}$, si definimos $f_1 : J \to X$ como $f_1(n_x) = x$, entonces $f_1$ va a ser biyectiva ya que para cada $x \in X$ existe $n_x \in J$ tal que $f_1(n_x) = x$ y si $f_1(n) = f_1(m)$, sea $x = f_1(n) = f_1(m)$, entonces $n, m \in I(x)$ y por como se eligió $J$ no queda mas que $n = m$.

Ahora bien, como $J \subset \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ está bien ordenado, entonces $J$ está bien ordenado (esto se sigue prácticamente de la definición de bien ordenado). Sea $j \in J$, definimos $P_j := \{x \in J : j < x\}$, notemos que para toda $j \in J$, $P_j \neq \emptyset$ pues $J \subset \mathbb{N}$ es infinito. También definimos $x_P \in P \subset J$ tal que $x_P \leq x$ para toda $x \in P$.

Definiendo $h : \mathbb{N}\times J \to J$ como $h(n, y) = x_{P_y}$, (notemos que la función $h$ está bien definida pues para cada $y \in J$, $P_y \neq \emptyset$, entonces como $J$ está bien ordenado, existe una y solo una $x_{P_y}$), por el principio de recursión, existe $g : \mathbb{N} \to J$ tal que $g(n+1) = h(n, g(n))$ con $g(0) = x_J$.

Probemos que $g$ es biyectiva. Basta probar que $g(n) < g(n+1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por definición recordemos que para toda $x \in P_{g(n)}$, $g(n) < x$, como $x_{P_{g(n)}} \in P_{g(n)}$, entonces $g(n) < x_{P_{g(n)}} = g(n+1)$.

Ahora probemos que $g$ es suprayectiva. Sea $K := \{x \in J : x \notin IM(g)\}$ y supongamos que $K \neq \emptyset$.

Como $J \setminus (P_{x_K} \cup \{x_K\}) \subset \{i\}_{i=0}^{x_K-1}$ es finito, pues su cardinalidad es menor igual que la de $\{i\}_{i=0}^{x_K-1}$ y además como $J \setminus (P_{x_K} \cup \{x_K\}) \neq \emptyset$ pues al menos $x_J \in J \setminus (P_{x_K} \cup \{x_K\})$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que es el número más grande que cumple $g(n) \in J \setminus (P_{x_K} \cup \{x_K\})$ (nótese que $g(n) < x_K$) ya $n$ es al menos 0 y a lo más $x_K - 1$. Por definición, $g(n+1) = x_{P_{g(n)}}$, si $x_{P_{g(n)}} < x_K$, entonces $g(n+1) < x_K$, por lo que $g(n+1) \in J \setminus (P_{x_K} \cup \{x_K\})$, contradiciendo que $n$ era el más grande que cumplía eso. Si $x_{P_{g(n)}} > x_K$, como $x_K \in P_{g(n)}$, entonces también debería cumplirse que $x_{P_{g(n)}} \leq x_k$, contradicción. Como $J$ tiene un orden lineal, entonces $g(n+1) = x_{P_{g(n)}} = x_k \in K$, contradiciendo la definición de $K$. Por lo tanto, $K = \emptyset$ lo que implica que $g$ es suprayectiva.

Luego $g \circ f_1 : \mathbb{N} \to X$ es una función biyectiva, por lo que $X$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$. $\square$

Demostración problema 7

Sea $B \subset X \setminus Y$ un subconjunto contable infinito, entonces por el lema 2 existe una función $f : B \to \mathbb{N}$ biyectiva, además por el lema 1, $B \cup Y$ es contable e infinito entonces también existe una función biyectiva $g : \mathbb{N} \to B \cup Y$. Luego $g \circ f : B \cup Y \to B$ es biyectiva,

Ahora definamos $h : X \setminus Y \to X$ como

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (X \setminus Y) \setminus B \\ (g \circ f)(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Por lo que $h$ es biyectiva, así que $X \setminus Y$ tiene la misma cardinalidad que $X$. $\square$

**Problema 8:**

Sea $E = \{[a_i, b_i]\}_{i \in I}$ una cadena de $X$. Veamos que $\{a_i\}_{i \in I}$ está acotado inferiormente, de lo contrario existirían $j, i \in I$ tal que $a_j \geq a_i + 3$, lo cual implica que $[a_j, b_j] \cap [a_i, b_i] = \emptyset$, contradiciendo que $E$ es una cadena. Análogamente $\{b_i\}_{i \in I}$ está acotado superiormente. Luego existe un ínfimo $a$ y un supremo $b$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existen $i, j \in I$ tal que un $a_i - \varepsilon < a$ y $b_j > b - \varepsilon$ .

Veamos que $b_j - a_i \leq 2$, de lo contrario $b_j \notin [a_i, b_i]$ y $a_i \notin [a_j, b_j]$, por lo que $[a_i, b_i] \nsubseteq [a_j, b_j]$ y $[a_j, b_j] \nsubseteq [a_i, b_i]$, contradiciendo que $E$ es una cadena. Luego:

$$\begin{aligned} b - a &< -a_i + b_j + 2\varepsilon \\ &\leq 2 + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow b - a &\leq 2 \end{aligned}$$

Claramente $b - a \geq 0$ si no $E$ no sería cadena. Por lo tanto, $[a, b] \in X$ y es una cota superior para la cadena $E$ pues para todo $i \in I$, $a \leq a_i$ y $b \geq b_i$, así $[a_i, b_i] \subset [a, b]$. $\square$