Tarea 10

Gyivan Erick López Campos

7 de noviembre de 2017

Ejercicio 1:

Sea $E=\left\{x\in[0,1]:\,\exists n,\,m\in\mathbb{N},\,x=\frac{m}{2^n}\right\}$, demostremos que E es denso en $[0,1]$. Sea $y\in[0,1]$ y $r>0$, demostremos que existe $x\in E$ tal que $x\in(y-r,\,y+r)$. Recordemos que y se puede escribir como

$$y \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i},\text{ con } a_i=0 \text{ ó } 1.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$ converge, entonces para r existe $N_r\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N_r}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}<r$, luego como $y\geq\sum_{i=1}^{N_r}\frac{a_i}{2^i}$ y $y<\sum_{i=1}^{N_r}\frac{a_i}{2^i}+r$, así que $y-\sum_{i=1}^{N_r}\frac{a_i}{2^i}<r$, por lo que $\sum_{i=1}^{N_r}\frac{a_i}{2^i}\in(y-r,\,y]\subset(y-r,\,y+r)$ y $\sum_{i=1}^{N_r}\frac{a_i}{2^i}\in E$.
Así que E es denso en $[0,1]$.

Ahora probemos que para $x,\,y\in[a,b]$ y $r\in E$ se tiene que:

$$\varphi\left(rx+(1-r)\,y\right) \;\leq\; r\varphi(x)+(1-r)\,\varphi(y)\,. \tag{1}$$

Sea $r=\frac{m}{2^n}$, procedamos por inducción sobre n. Por hipótesis tenemos que para $n=1$ se cumplirá (1). Supongamos que se cumple para n, demostremos que sigue siendo válido para $n+1$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x>y$, entonces $\frac{m}{2^n}x+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\in[x,\,y]\subset[a,\,b]$, entonces debe cumplirse que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{m}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{m}{2^{n+1}}\right)y\right) &= \varphi\left(\frac{\left[\frac{m}{2^n}x+\left(2-\frac{m}{2^n}\right)y\right]}{2}\right)\\
&= \left(\frac{\left[\frac{m}{2^n}x+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right]+y}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m}{2^n}x+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right)+\frac{1}{2}\varphi(y)\,.\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m}{2^n}\right)\varphi(x)+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)\varphi(y)\right]+\frac{1}{2}\varphi(y)\,.\text{ por hip. de inducción.}\\
&= \left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)\varphi(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2^{n+1}}\right)\varphi(y)+\frac{1}{2}\varphi(y)\\
&= \left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)\varphi(x)+\left(1-\frac{m}{2^{n+1}}\right)\varphi(y)\,.
\end{aligned}$$

Por último sea $\lambda \in [0,1]$ y $x,\, y \in [a,\, b]$, demostremos que

$$\varphi\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \quad \leq \quad \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\,\varphi(y)\,.$$

Veamos que por la densidad de E en $[0,\, 1]$, podemos formar la sucesión $\left\{r_n \in E : \, r_n \in \left(\lambda - \frac{1}{n},\, \lambda + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces por (1) tendremos que:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(r_n x + (1-r_n)\, y\right) &\leq r_n \varphi(x) + (1-r_n)\,\varphi(y)\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi\left(r_n x + (1-r_n)\, y\right) &\leq \lim_{n\to\infty} r_n \varphi(x) + \lim_{n\to\infty} (1-r_n)\,\varphi(y) \\
\Rightarrow \varphi\left(\lim_{n\to\infty} r_n x + \lim_{n\to\infty} (1-r_n)\, y\right) &\leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\,\varphi(y)\,,\ \text{por la continuidad de } \varphi \\
\Rightarrow \varphi\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) &\leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\,\varphi(y)\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2:

(a) Veamos que gracias a las propiedades aritméticas, para toda $t \geq 0$, se tiene que $t^p \leq \max\{t^r,\, t^s\} \leq t^r + t^s$. Luego para toda $x \in X$, $\|f(x)\|^p \leq \|f(x)\|^s + \|f(x)\|^r$, así que

$$\begin{aligned}
\int_X \|f(x)\|^p\, d\mu &\leq \int_X \|f(x)\|^s\, d\mu + \int_X \|f(x)\|^r\, d\mu \\
\Rightarrow \varphi(p) &\leq \varphi(s) + \varphi(r) < \infty.
\end{aligned}$$

Luego $p \in E$.

(b) Sea $\lambda \in (0,\, 1)$, $r,\, s \in E$ y definamos $p = \lambda r + (1-\lambda)\, s$. Veamos que $a := \frac{1}{\lambda}$ y $b := \frac{1}{1-\lambda}$ son un par de exponentes conjugados porque $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ y además $1 < a,\, b < \infty$. Luego aplicando la desigualdad de Hölder a $g = |f|^{\lambda r}$ y $h = |f|^{(1-\lambda)s}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(p) = \int_X |f|^p\, d\mu &= \int_X |f|^{\lambda r + (1-\lambda)s}\, d\mu \\
&= \int_X |f|^{\lambda r}\, |f|^{(1-\lambda)s}\, d\mu \\
&= \int_X gh d\mu \\
&\leq \left[\int_X g^a d\mu\right]^a \left[\int_X h^b d\mu\right]^b \\
&= \|g\|_a\, \|h\|_b \\
&= (\varphi(r))^{1/a}\, (\varphi(s))^{1/b}
\end{aligned}$$

Como log es creciente, entonces

$$\begin{aligned}
\log \varphi(p) &\leq \log\left((\varphi(r))^{1/a}\, (\varphi(s))^{1/b}\right) \\
\Rightarrow \log \varphi\left(\lambda r + (1-\lambda)\, s\right) &\leq \log\left((\varphi(r))^{1/a}\right) + \log\left((\varphi(s))^{1/b}\right) \\
&= \frac{1}{a} \log(\varphi(r)) + \frac{1}{b} \log(\varphi(s)) \\
&= \lambda \log(\varphi(r)) + (1-\lambda) \log(\varphi(s))
\end{aligned}$$

Ahora sea $\{p_n\}$ una sucesión en E que converge a $p \in E$. Luego $\{p_n\} \cup \{p\}$ es cerrado, y como $p < \infty$, entonces

$\{p_n\}$ está acotada superiormente e inferiormente. Digamos que $a = \text{ínf}\,(p_n,\, p)$ y $b = \sup\,(p_n,\, p)$, y al ser $\{p_n\} \cup \{p\}$ cerrado, entonces $a,\, b \in E$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el inciso a) tenemos que

$$|f|^{p_n} \quad \leq \quad |f|^a + |f|^b\,.$$

Pero $\int_X \left(|f|^a + |f|^b\right) d\mu = \int_X |f|^a + \int_X |f|^b\, d\mu < \infty$, entonces $|f|^a + |f|^b$ es L_1 y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int_X |f|^{p_n}\, d\mu < \infty$ así que cada $|f|^{p_n}$ también son L_1, por lo que podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada obteniendo que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi\,(p_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_X |f|^{p_n}\, d\mu \\ &= \int_X |f|^p\, d\mu \\ &= \varphi\,(p) \end{aligned}$$

Así, φ es continua en E.

(c)

(d) Gracias al inciso b) sabemos que $\log\varphi$ es una función convexa en E. Así que para $p = \lambda r + (1-\lambda)\, s$, tenemos que

$$\begin{aligned} \log \|f\|_p^p &= \log\varphi\,(p) \\ &\leq \lambda \log\varphi\,(r) + (1-\lambda)\log\varphi\,(s) \\ &= \lambda \log \|f\|_r^r + (1-\lambda)\log\|f\|_s^s \\ \Rightarrow p\log\|f\|_p &\leq \lambda r \log\|f\|_r + (1-\lambda)\, s\log\|f\|_s \\ \Rightarrow \log\|f\|_p &\leq \frac{\lambda r}{p}\log\|f\|_r + \frac{(1-\lambda)\,s}{p}\log\|f\|_s \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora veamos que $\frac{\lambda r}{p} + \frac{(1-\lambda)s}{p} = 1$, entonces por (2) tenemos que:

$$\begin{aligned} \log\|f\|_p &\leq \frac{\lambda r}{p}\,\text{máx}\left\{\log\|f\|_r\,,\, \log\|f\|_s\right\} + \frac{(1-\lambda)\,s}{p}\,\text{máx}\left\{\log\|f\|_r\,,\, \log\|f\|_s\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\log\|f\|_r\,,\, \log\|f\|_s\right\} \end{aligned}$$

Luego como log es creciente, tenemos que $\|f\|_p \leq \text{máx}\left\{\|f\|_r\,,\, \|f\|_s\right\}$.

Por último, si $g \in L^r(\mu) \cap L^s(\mu)$ entonces$\|g\|_r\,,\, \|g\|_s < \infty$, así que $\text{máx}\left\{\|g\|_r\,,\, \|g\|_s\right\} < \infty$, así que gracias al resultado anterior tenemos que $\|g\|_p \leq \text{máx}\left\{\|g\|_r\,,\, \|g\|_s\right\} < \infty$, por lo que $g \in L^p(\mu)$. Por lo tanto

$$L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \quad \subset \quad L^p(\mu)\,.$$

Ejercicio 3:

(a) Definamos $p = \frac{s}{r} > 1$, entonces $\psi\,(x) = x^p$ es una función convexa en $[0,\, \infty)$ gracias a que ψ es creciente. Definamos

$g=|f|^r\in L^1(\mu)$, entonces podemos aplicar la desigualdad de Jensen a g y ψ, lo que da como resultado:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\int_X gd\mu\right) &\leq \int_X \psi\circ gd\mu \\
\Rightarrow \left(\int_X |f|^r\,d\mu\right)^p &\leq \int_X |f|^{rp}\,d\mu \\
&= \int_X |f|^s\,d\mu \\
\Rightarrow \int_X |f|^r\,d\mu &\leq \left(\int_X |f|^r\,d\mu\right)^p \\
&= \int_X |f|^s\,d\mu \\
\Rightarrow \|f\|_r^r &\leq \|f\|_s^s \\
\Rightarrow \|f\|_r &\leq \|f\|_s
\end{aligned}$$

Ejercicio 4:

Veamos que como $\|f_n-f\|_p\to 0$ entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy con límite f, entonces por el teorema 3.12 del Rudín, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $\{f_{n_k}\}$ converge que f puntualmente $\mu-c.t.p.$ Pero como $f_n\to g$ en $\mu-c.t.p$, entonces $f_{n_k}\to g$ en $\mu-c.t.p.$ Sea E los puntos donde f_n no converge a g y F los puntos donde f_{n_k} no converge a f, entonces $f=g$ salvo en $E\cup F$, pero $\mu(E\cup F)\leq\mu(E)+\mu(F)=0$.

Por lo tanto $f=g\ \mu-c.t.p$.

Ejercicio 5:

Como $fg\geq 1$ entonces $\sqrt{fg}\geq 1$. Además al ser $\sqrt{f}$ y $\sqrt{g}$ funciones medibles positivas también, entonces podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en ellas. Así que:

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega fd\mu\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega gd\mu\right]^{\frac{1}{2}} &\geq \int_\Omega\sqrt{fg}d\mu \\
&\geq \int_\Omega d\mu \\
&= \mu(\Omega)=1 \\
\Rightarrow \int_\Omega fd\mu\cdot\int_\Omega gd\mu &\geq 1.
\end{aligned}$$