Tarea 11

Gyivan Erick López Campos

12 de noviembre de 2017

Problema 1:

Sea $x \in M$, entonces para toda $y \in M^{\perp}$, tenemos que $(x,\, y) = 0$ por definición, lo cual implica que $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, porque ortogonal a todo vector de $M^{\perp}$. Luego $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

Ahora si $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, entonces por el teorema 4.11 tenemos que existe $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$ tal que $x = y + z$. Como $0 = (x,\, z) = (y + z,\, z) = (y,\, z) + (z,\, z) = (z,\, z)$, entonces $z = 0$. Luego $x = y \in M$. Por lo tanto $M = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

Si suponemos que M no es necesariamente cerrado, si podemos concluir que $M^{\perp}$ porque es intersección de conjuntos cerrados, luego por la parte de arriba tenemos que $M^{\perp} = \left(\left(M^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$. También por la parte de arriba sabemos que $\overline{M} = \left(\overline{M}^{\perp}\right)^{\perp}$, pero $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, pues es claro que $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$ y si tomamos $x \in M^{\perp}$, veamos que para toda $y \in \overline{M}$, existe $\{y_i\} \subset M$ tal que $y_i \to y$. Como $(x,\, y_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces por la continuidad del producto interior tenemos que $(y_i,\, x) \to (y,\, x) = 0$. Luego $x \in \overline{M}^{\perp}$. Por lo tanto $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, así que $\overline{M} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. $\square$

Problema 2:

Claramente cada u_i es normal por que está definido a partir de un vector sobre su norma. Ahora probemos que para cada $m,\, n \in \mathbb{N}$, si $n \neq m$ entonces$(u_m,\, u_n) = 0$. Sin pérdida de generalidad sea $n > m$ y procedamos por inducción sobre n. Si $n = 1$ es claro que $\{u_1\}$ es un conjunto ortonormal. Supongamos que es cierto para n, probémoslo para $n+1$. Por hipótesis de inducción sabemos que para toda $i < j < n + 1$, tenemos que $(u_i,\, u_j) = 0$ y $(u_i,\, u_i) = 1$. Solo basta probar que para toda $m < n + 1$ $(u_m,\, u_{n+1}) = 0$. Como u_{n+1} es v_{n+1} por un escalar, basta que probemos que $(u_m,\, v_{n+1})$, $\forall m < n + 1$. Sabemos que:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (x_{n+1},\, u_i)\, u_i \\ \Rightarrow (v_{n+1},\, u_m) &= \left(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (x_{n+1},\, u_i)\, u_i,\, u_m \right) \\ \Rightarrow (v_m,\, u_{n+1}) &= (x_{n+1},\, u_m) - \sum_{i=1}^{n} \left[(x_{n+1},\, u_i)\, (u_i,\, u_m) \right] \\ &= (x_{n+1},\, u_m) - (x_{n+1},\, u_m) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal.

Para probar que $gen\,\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = gen\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que $gen\,\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset gen\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pues cada u_i es combinación lineal de las x_j por definición, con $j = 1,\, 2, ...,\, i - 1$. Ahora si $y \in gen\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existe $N_y \in \mathbb{N}$ y constates c_i tal que

$$y = \sum_{i=1}^{N_y} c_i x_i,$$

pero cada $x_j = u_j \|v_j\| + \sum_{i=1}^{j-1} (x_{n+1},\, u_i)\, u_i$, donde $\|v_j\|$ y $(x_{n+1},\, u_i)$ son escalares. Luego:

$$y \;=\; \sum_{i=1}^{N_y} \left[c_i \left[u_i \|v_i\| + \sum_{j=1}^{i-1} (x_{n+1},\, u_j)\, u_j \right] \right].$$

Que claramente es una combinación lineal de las u_i, con $i = 1, ..., N_y$.

Por lo tanto, $gen\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = gen\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Problema 3:

Tomemos $u_n = e^{int}$, con $t \in A$, la base trigonométrica de $L^2(T)$, que como ya vimos es un conjunto ortonormal maximal.

Sea $c_n = (u_n,\, \chi_A) = \int_A u_n(t)\, dt$. Luego por el teorema 4.18 tenemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \;=\; \|\chi_A\|^2 < \infty,$$

pero esto implica que $|c_n|^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, porque la serie converge, entonces $|c_n| \to 0$.

Ahora veamos que

$$\begin{aligned}
\int_A \cos nx &= \int_A \frac{\cos nx + i \sin nx + \cos nx - i \sin nx}{2} dx \\
&= \int_A \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_A e^{int} dt + \int_A e^{-int} dt \right) \\
&= \frac{1}{2}(c_n + c_{-n}) \\
\Rightarrow \int_A \cos nx \to 0 \quad \text{cuando} \quad & n \to \infty, \text{ pues} \\
\frac{1}{2}(c_n + c_{-n}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad & n \to \infty.
\end{aligned}$$

También observemos que:

$$\begin{aligned}
\int_A \sin nx &= \int_A \frac{-\cos nx + i \sin nx + \cos nx + i \sin nx}{2i} dx \\
& \int_A \frac{-e^{-int} + e^{int}}{2i} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_A e^{-int} dt + \int_A e^{int} dt \right) \\
&= \frac{1}{2}(-c_{-n} + c_n) \\
\Rightarrow \int_A \sin nx \to 0 \quad \text{cuando} \quad & n \to \infty, \text{ pues} \\
\frac{1}{2}(c_n - c_{-n}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad & n \to \infty \\
\therefore \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx = \lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx &= 0. \square
\end{aligned}$$