Tarea 12

Gyivan Erick López Campos

4 de diciembre de 2017

Ejercicio 1:

Como $\{f_n\} \to f$ en casi todo punto en $\mathcal{A}$, entonces sea $G \subset \mathcal{A}$ el conjunto donde $\{f_n\} \to f$. Entonces $\mu(G) = \mu(X) < \infty$, pues $\mu(X - G) = 0$.

Veamos que por definición de convergencia puntual, tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$:

$$G = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

Denotemos $E_{n,k} := \bigcap_{n>N} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$. Es claro que

$$\bigcap_{n>1} E_{n,k} \subset \bigcap_{n>2} E_{n,k} \subset \cdots$$

y además $\lim_{N\to\infty} \bigcap_{n>N} E_{n,k} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} E_{n,k} = G$, entonces por teorema visto en clase tenemos que:

$$\mu(G) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>N} E_{n,k}\right).$$

Luego como $\mu(G) < \infty$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\mu\left(G - \bigcap_{n>N} E_{n,k}\right) &= \mu(G) - \mu\left(\bigcap_{n>N} E_{n,k}\right) \\ &\to 0, \text{ cuando } N \to \infty,\end{aligned}$$

lo cual quiere decir que para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $N > N_k$:

$$\mu\left(G - \bigcap_{n>N} E_{n,k}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Denotemos como $F_k := \bigcap_{n>N} E_{n,k}$. Así que

$$G - \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (G - F_k).$$

Luego

$$\begin{aligned}\mu\left(G-\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(G-F_k)\right)\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\mu\left((G-F_k)\right)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\end{aligned}$$

Por último, definamos $\mathcal{B}_1 = G-\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k$. Probemos que $\{f_n\}\to f$ uniformemente en $G-\mathcal{B}_1=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k$. Veamos que para cada $m\in\mathbb{N}$, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k\subset F_m$, entonces por como se definió F_m, para cada $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k\subset F_m$, tenemos que:

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{1}{m},\ \forall m\in\mathbb{N}$$

Así que $\{f_n\}\to f$ converge uniformemente en $G-\mathcal{B}_1$, pero si tomamos $\mathcal{B}:=(G-\mathcal{B}_1)\cup(X-G)$, entonces $\mu(\mathcal{B})=\mu(\mathcal{B}_1)$ con lo que habremos acabado la prueba.

Ahora si suponemos que el espacio es de medida infinita, entonces tomemos $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ como $f_n=\chi_{[n-1,\,n]}$. Claramente $f_n\to 0$ puntualmente cuando $n\to\infty$, sin embargo, si nos tomamos cualquier $G\subset\mathbb{R}$ tal que $f_n\to 0$ uniformemente en G, entonces tendremos que para toda $x\in G$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n>N$:

$$|f_n(x)| < 1$$

entonces $x\notin[N,\infty)$, así que $G\subset[0,N)$, por lo que $\mu(\mathbb{R}-G)\geq\mu([N,\infty))=\infty$. Así que no podemos encontrar el conjunto que se quería.

Ejercicio 2

Como el conjunto $\mathcal{C}$ del Cantor es de medida cero con la medida de Lebesgue, entonces se puede cubrir con intervalos disjuntos (a_n,b_n) tan pequeños como se quiera, de tal forma que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n-a_n)<\delta$, para toda $\delta>0$. Supongamos que la función de Cantor f es absolutamente continua, entonces para $\frac{1}{2}$, existe $\delta>0$ tal que si

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n-a_n) &< \delta\\ \Rightarrow\sum_{n\in\mathbb{N}}|f(b_n)-f(a_n)| &< \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

pero por como está definida la función del cantor, sabemos que para cualquier partición del intervalo $[0,1]$, digamos (c_k,d_k), $\sum_{k\in\mathbb{N}}|f(c_k)-f(d_k)|=1$. Luego tomemos la partición $[a_1,b_1],[b_1,a_2],[a_2,b_2],....$ del intervalo $[0,1]$ (esto se puede gracias a como esta definido el cantor), entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}}|f(a_n)-f(b_n)|+|f(b_n)-f(a_{n+1})|=1$. Ahora bien, por como está definida la función del cantor, $|f(b)-f(a)|\neq 0$ si y solo si entre a y b hay un número del conjunto del cantor. Luego $\sum_{n\in\mathbb{N}}|f(a_n)-f(b_n)|=1$ porque entre a_{n+1} y b_n no hay ningún número del cantor porque (a_n,b_n) cubren a $\mathcal{C}$, lo cual es una contradicción con (1).

Por lo tanto, f no es absolutamente continua.

Problema 3:

Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 0\}$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $|f| \in L^1(\mathbb{R})$, lo cual quiere decir que $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty$.

Luego $\mu(A)$ tiene que ser finita, de lo contrario

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu &= \int_A |f| \, d\mu + \int_{A^c} |f| \, d\mu \\ &= \int_A |f| \, d\mu = \infty\end{aligned}$$

ya que $|f| \, |_{A^c} = 0$. Lo cual es una contradicción con que $|f| \in L^1(\mathbb{R})$

Ahora que se cumplen las hipótesis del teorema de Lusin, podemos garantizar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in C_c(\mathbb{R})$ (que por definición es continua) tal que

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

Definiendo $\mathcal{B} := \{x : f(x) \neq g(x)\}$, claramente f va a ser continua en $\mathcal{B}^c$, porque es igual a g que es continua y $\mu(\mathcal{B}) < \varepsilon$ como se quería.

Ejercicio 4:

(a) Como la medida de Lebesgue en la completación de la medida boleriana (como veremos en el siguiente inciso), entonces por definición de completación tenemos que

$$\lambda \, |_{\mathcal{B}} = \mu,$$

así que en los bolerianos, la medida de Lebesgue a valer lo mismo que la medida boleriana.

(b) Los conjuntos que son Lebesgue medibles pero no bolerianos son necesariamente conjuntos de medida cero, pues son la completación de los bolerianos, esto quiere decir que se le agregan todos los subconjuntos de conjuntos bolerianos de medida cero. Por lo tanto los conjuntos Lebesgue medibles que no son bolerianos deben de ser de medida 0 y si existen dichos conjuntos, porque la medida de borel no es completa.

Para hacer la completación de la medida de borel a la de Lebesgue, primero tomemos la medida exterior de μ que denotaremos como μ^* que es de la siguiente forma: Dado cualquier $B \subset \mathbb{R}$, definimos:

$$\mu^*(B) = \inf \mu\left(\left\{M \subset \mathbb{R} : M = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \text{ y } B \subset M\right\}\right).$$

Ahora la sigma álgebra de Lebesgue van a ser los conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tal que para toda $B \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

Por último, para toda A en la sigma álgebra de Lebesgue definimos la medida de Lebesgue λ como

$$\lambda(A) := \mu^*(A).$$

Problema 6:

Por hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un conjunto $A_n \subset X$ tal que $\mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y $f_n \to f$ uniformemente en $X \setminus A_n$. Definamos $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Luego

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(A_n) \\ &= \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así que $\mu(A) = 0$ y además si $x \in X \setminus A$, quiere decir que $x \notin A_N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, entonces$x \in X \setminus A_N$, que por definición de los A_n's implica que $f_n \to f$ uniformemente en $X \setminus A_N$, y como convergencia uniforme implica convergencia puntual, $f_n \to f$ puntualmente en $X \setminus A_N$, así que $f_n \to f$ en x. Por lo tanto $f_n \to f$ puntualmente casi en todos lados.

Problema 8:

Definamos $f_n = f\chi_{[0,\, n]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces claramente se puede ver que cada f_n es Lebesgue integrable pues

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_n d\lambda &= \int_0^\infty f\chi_{[0,\, n]} d\lambda \\ &= \int_0^n f\, d\lambda = 0 \end{aligned}$$

y además $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. También sabemos que si f es integrable, entonces $|f|$ también lo es y además $|f_n| \leq |f|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego por el teorema de la convergencia dominada podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n d\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 9:

Si suponemos que $f = \alpha\chi_{[a,\, b]}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)\, d\lambda &= \alpha \lim_{t\to\infty} \int_a^b \cos(xt)\, d\lambda \\ &= \alpha \lim_{t\to\infty} \frac{\sin(tb) - \sin(ta)}{t} \\ &\leq \alpha \lim_{t\to\infty} \frac{2}{t} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora si f es una función simple debe de ser de la forma $f = \sum \alpha_i \chi_{[a_i,\, b_i]}$, así que por el resultado (2) y la linealidad de la integral tenemos que $\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)\, d\lambda = 0$ (porque es suma finita de funciones como en (2)).

Por último, por el teorema 3.13 del Rudin sabemos que las funciones continuas son densas en L^1, entonces existe una función g simple tal que para toda $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g|\, dx < \varepsilon$$

Además

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)\, d\lambda \right| &= \lim_{t\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\cos(xt)\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} g(x)\cos(xt)\, d\lambda \right| \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\cos(xt)\, d\lambda \right| + \lim_{t\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)\cos(xt)\, d\lambda \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}(f(x)-g(x))\cos(xt)\,d\lambda\right| \text{ por (2)}\\
&\leq \lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|(f(x)-g(x))|\,|\cos(xt)|\,d\lambda\\
&\leq \lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|(f(x)-g(x))|\,d\lambda\\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego $\lim_{t\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)\,d\lambda\right| = 0$, por lo tanto $\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)\,d\lambda = 0$.

Ejercicio 11:

(a) Sea $E \in A$ tal que $(\mu_1+\mu_2)(E) = 0$, entonces basta que $\mu_1(E) = -\mu_2(E)$, lo cual no implica necesariamente que $\mu_1(E) = 0$, así que la proposición es falsa. Sin embargo, es cierto que $\mu_1 \ll |\mu_1| + |\mu_2|$, pues tendremos que $\forall E \in A$ tal que $(|\mu_1|+|\mu_2|)(E) = 0$, $2|\mu_1|(E) = 0 \Rightarrow |\mu_1|(E) = 0 \Rightarrow \mu_1(E) = 0$.

(b) Sea $E \in A$ tal que $\mu_3(E) = 0$, entonces $\mu_1(E) = 0 = \mu_2(E)$ por hipótesis, así que $\mu_1(E) + \mu_2(E) = (\mu_1+\mu_2)(E) = 0$. Luego $\mu_1 + \mu_2 \ll \mu_3$.

Problema 12:

La flecha incorrecta es que convergencia uniforme no implica convergencia en L^p y el contra ejemplo es el siguiente. Sean $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y medibles con la medida de Lebesgue. Fijemos $1 \leq p < \infty$ y definamos

$$f_n = \frac{1}{n^{1/p}}\chi_{[0,\,n]}$$

es claro que $|f_n| \leq n^{-1/p}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, luego cuando $n \to \infty$ se tiene que $f_n \to f$ uniformemente porque su cota no depende de la x que se tome.

Sin embargo

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p &= \left(\int_0^\infty |f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int_0^n \frac{1}{n}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

así que f_n no converge a 0 en L^p.

Ejercicio 13:

Veamos que como $E \subset [0,1]$ tiene medida cero de Lebesgue, entonces quiere decir que podemos cubrir a E con intervalos disjuntos $(a_i,\, b_i)$ suficientemente pequeños tal que para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,\,b_i)\right) &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\mu((a_i,\,b_i))\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \delta.
\end{aligned}$$

Luego como f es absolutamente continua, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \delta_\varepsilon$ se tiene que $\sum_{i\in\mathbb{N}}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Claramente como $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,\,b_i)$ entonces $f(E) \subset f\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,\,b_i)\right)$ y como f es monótonamente creciente o decreciente, entonces si es creciente $\mu(f(a,\, b)) = |f(a) - f(b)| = \mu((f(a)\,,\, f(b)))$ y si es decreciente tenemos que $\mu(f(a,\, b)) = |f(a) - f(b)| = \mu((f(b)\,,\, f(a)))$ y además $f(E) \subset f\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,\, b_i)\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f((a_i,\, b_i))$. Luego:

$$\begin{aligned}\mu(f(E)) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(f((a_i,\, b_i))) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Así que $f(E)$ se puede cubrir con conjuntos Lebesgue medibles, con medida tan pequeña como se desea, así que cuando se tome el ínfimo para calcular la medida de Lebesgue de $f(E)$ se tendrá que $\mu(f(E)) = 0$, con lo cual queda demostrado lo que se quería.

Problema 14:

(a) Debe existir $E \subset \mathbb{R}$ abierto tal que existe $F \in A_1$ con $F = f^{-1}(E)$ y que $g^{-1}(F) \notin A_2$. De esto se puede deducir que f no puede ser continua.

(b) Si fijamos a $A_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, es claro que A_1 es una sigma álgebra y además, no importa como se tome A_2, siempre se va a tener que $f \circ g$ es medible porque para todo abierto $E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E) = \mathbb{R}$ o $f(E) = \emptyset$, luego $g^{-1}\left(f^{-1}(E)\right) = \mathbb{R}$ o $g^{-1}\left(f^{-1}(E)\right) = \emptyset$, en ambos casos $g^{-1}\left(f^{-1}(E)\right) \in A_2$ para toda A_2, por lo tanto $f \circ g$ es medible.