Tarea 2
Analisis Matemático I

Alumno: Gyivan Erick López Campos
Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

26 de agosto de 2017

Problema 1:

DEMOSTRACIÓN:

Primero probemos que e es una métrica.

- Sean $\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}^2$, $e(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) = |x-u| + |y-v| = 0$ si y solo si $x = u$ y $y = v$, ya que $|x-u|$ y $|y-v|$ son no negativos. Luego $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ si y solo si $e(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) = 0$. (aquí se prueba (1) y (4) de la definición de métrica)
- Sean $\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}^2$, entonces $e(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) = |x-u| + |y-v| = |u-x| + |v-y| = e(\langle u, v\rangle, \langle x, y\rangle)$.
- Sean $\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle, \langle n, m\rangle \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} e(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) &= |x-u| + |y-v| \\ &= |x-u| + |y-v| \\ &= |x-n+n-u| + |y-m+m-v| \\ &\leq |x-n| + |y-m| + |n-u| + |m-v| \\ &= e(\langle x, y\rangle, \langle n, m\rangle) + e(\langle n, m\rangle, \langle u, v\rangle) \end{aligned}$$

Por lo tanto, e es una métrica.

Sea τ_d la topología metrizada por d y τ_e la topología metrizada por e, probemos que son la misma.

Sea $U \in \tau_d$, entonces existen bolas abiertas $B_d(\langle x_i, y_i\rangle, r_i) \subset \mathbb{R}^2$, con $i \in I$, definidas con la métrica d tal que $\bigcup_{i\in I} B_d(x_i, r_i) = U$. Veamos que:

$$\begin{aligned} r_i^2 > (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 &= (|x-x_i| + |y-y_i|)^2 - 2|x-x_i||y-y_i| && (1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{r_i^2 + 2|x-x_i||y-y_i|} &> |x-x_i| + |y-y_i| \text{ porque todo es positivo.} && (2) \end{aligned}$$

Sea $\langle x_0, y_0\rangle \in U$, entonces existe una bola $B_d(\langle x_i, y_i\rangle, r_i)$, con $i \in I$, tal que $\langle x_0, y_0\rangle \in B_d^i(\langle x_i, y_i\rangle, r_i)$, tomemos la bola abierta $B_e\left(\langle x_i, y_i\rangle, \sqrt{r_i^2 + 2|x_0-x_i||y_0-y_i|}\right)$ con la métrica e (está bien definida pues $\sqrt{r_i^2 + 2|x-x_i||y-y_i|} > 0$ ya que $r_i^2 > 0$), entonces porque (1) implica (2), $\langle x_0,\, y_0\rangle \in B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 + 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$, y además para toda $\langle x,\, y\rangle \in B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 + 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$, $\langle x,\, y\rangle \in B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)$, porque (2) implica (1), luego

$$\begin{aligned}
B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 + 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right) &\subset B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right), \forall \langle x_0,\, y_o\rangle \in B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right) \\
\Rightarrow \bigcup_{\langle x_0,\, y_o\rangle \in B_d(\langle x_i,\, y_i\rangle,\, r_i)} B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 + 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right) &= B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = \bigcup_{\substack{i\in I \\ \langle x_0,\, y_o\rangle \in B_d(\langle x_i,\, y_i\rangle,\, r_i)}} B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 + 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$$

Como U es unión de bolas abiertas con la métrica e, entonces $U \in \tau_e$. Por lo tanto $\tau_d \subset \tau_e$

Ahora tomemos $V \in \tau_d$, entonces existen bolas abiertas $B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right) \subset \mathbb{R}^2$, con $i \in I$, definidas con la métrica e tal que $\bigcup_{i\in I} B_e\left(x_i,\, r_i\right) = V$. Veamos que:

$$r_i^2 > \left(|x - x_i| + |y - y_i|\right)^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + 2\,|x - x_i|\,|y - y_i| \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r_i^2 - 2\,|x - x_i|\,|y - y_i|} > \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \tag{4}$$

En (2) todos los números reales porque $r_i^2 - 2\,|x - x_i|\,|y - y_i| > (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \geq 0$.

Sea $\langle x_0,\, y_0\rangle \in V$, entonces existe una bola $B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)$, con $i \in I$, tal que $\langle x_0,\, y_0\rangle \in B_e^i\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)$, tomemos la bola abierta $B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x - x_i|\,|y - y_i|}\right)$ con la métrica d (está bien definida pues $\sqrt{r_i^2 - 2\,|x - x_i|\,|y - y_i|} > 0$ ya que $r_i^2 - 2\,|x - x_i|\,|y - y_i| > 0$), entonces porque (3) implica (4), $\langle x_0,\, y_0\rangle \in B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$, y además para toda $\langle x,\, y\rangle \in B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$, $\langle x,\, y\rangle \in B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)$, porque (4) implica (3), luego

$$\begin{aligned}
B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right) &\subset B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right), \forall \langle x_0,\, y_o\rangle \in B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right) \\
\Rightarrow \bigcup_{\langle x_0,\, y_o\rangle \in B_e(\langle x_i,\, y_i\rangle,\, r_i)} B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right) &= B_e\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, r_i\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \bigcup_{\substack{i\in I \\ \langle x_0,\, y_o\rangle \in B_e(\langle x_i,\, y_i\rangle,\, r_i)}} B_d\left(\langle x_i,\, y_i\rangle\,,\, \sqrt{r_i^2 - 2\,|x_0 - x_i|\,|y_0 - y_i|}\right)$$

Como V es unión de bolas abiertas con la métrica d, entonces $V \in \tau_d$. Por lo tanto $\tau_e \subset \tau_d$.

Luego $\tau_e = \tau_d$, con lo que d y e metrizan la misma topología. $\square$

Problema 2:

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos que para cualesquiera 3 conjuntos A, B, C,

$$C \setminus (B \setminus A) = (C \cap A) \cup (C \setminus B) \tag{5}$$

y

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C \tag{6}$$

Probemos que el complemento de ∂A es cerrado, i.e. $X \setminus (\partial A)$ es abierto. Veamos que

$$\begin{aligned} X \setminus (\partial A) &= X \setminus \left(\bar{A} \setminus int\, A\right) \\ &= (X \cap int\, A) \cup \left(X \setminus \overline{A}\right) \text{ por (5)} \\ &= int\, A \cup \left(X \setminus \bar{A}\right) \end{aligned}$$

Como $\bar{A}$ es cerrado, entonces $X \setminus \bar{A}$ es abierto y además como el $int\, A$ es unión de abiertos, entonces $int\, A$, $X \setminus \bar{A} \in \tau$. Luego $\left(X \setminus \bar{A}\right) \cup int\, A \in \tau$ por definición de topología, por lo que $\left(X \setminus \bar{A}\right) \cup int\, A = X \setminus (\partial A)$ es abierto, por lo tanto ∂A es cerrado.

Falta demostrar que $\partial A = \partial\,(X \setminus A)$

Primero probemos que para todo conjunto A, $\partial A = (X \setminus int\, A) \cap \overline{A}$. Veamos que:

$$\begin{aligned} \overline{A} \cap (X \setminus int\, A) &= \left(\overline{A} \cap X\right) \setminus int\, A \text{ por (6)} \\ &= \overline{A} \setminus int\, A \\ &= \partial A \end{aligned}$$

Ahora, probemos que para toda $A \subset X$:

$$X \setminus \overline{A} = int\,(X \setminus A) \tag{7}$$

Como $X \setminus \overline{A}$ es abierto y está contenido en $X \setminus A$, pues $A \subset \overline{A}$, entonces por definición de interior, $X \setminus \overline{A} \subset int\ (X \setminus A)$. Para la otra contención, como $X \setminus A$ es disjunto con A y $int\ (X \setminus A) \subset X \setminus A$, entonces $int\ (X \setminus A)$ es dijunto con A, además como $X \setminus int\ (X \setminus A)$ es cerrado y $A \subset X \setminus int\ (X \setminus A)$, por que $int\ (X \setminus A)$ es disjunto con A, entonces $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus int\ (X \setminus A)$, por lo que $X \setminus \bar{A} \supset X \setminus (X \setminus int\ (X \setminus A)) = int\ (X \setminus A)$, por que el complemento del complemento es el conjunto original. Por lo tanto, $X \setminus \overline{A} = int\,(X \setminus A)$.

Luego esto nos implica que

$$X \setminus int\, A = \overline{X \setminus A} \tag{8}$$

ya que:

$$\begin{aligned} X \setminus int\, A &= X \setminus int\,(X \setminus (X \setminus A)) \\ &= X \setminus \left(X \setminus \overline{(X \setminus A)}\right) \text{ por (7)} \\ &= \overline{(X \setminus A)} \end{aligned}$$

Como ya vimos, podemos escribir $\partial(X \setminus A) = (X \setminus int\ (X \setminus A)) \cap \overline{(X \setminus A)}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\partial(X \setminus A) &= (X \setminus int\ (X \setminus A)) \cap \overline{(X \setminus A)} \\
&= \left(X \setminus \left(X \setminus \overline{A}\right)\right) \cap (X \setminus int\, A)\text{, por (7) y (8)} \\
&= \overline{A} \cap (X \setminus int\, A) \\
&= \partial A
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Por último probemos que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ y daremos un contraejemplo para $\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$. Para esto, necesitamos algunos resultados previos:

- Como para cualquier A, $B \subset X$, tenemos que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$, entonces $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, pero $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado porque es unión finita de cerrados, entonces por definición $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Además como $A \cup B \supset A$ y $A \cup B \supset B$, entonces $\overline{A \cup B} \supset \overline{A}$ y $\overline{A \cup B} \supset \overline{B}$, luego $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por lo tanto:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{9}$$

- Para cualquier A, B, $C \subset X$, probemos que $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Sea $x \in (A \cup B) \setminus C$, entonces $x \in A \cup B$, pero $x \notin C$. Como $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ pero a C o $x \in B$ pero no a C, entonces $x \in A \setminus C$ o $x \in B \setminus C$, por lo que $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, así que:

$$(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{10}$$

- Para cuales quiera A, B, $C \subset X$, probemos que:

$$C \setminus int\ (A \cup B) \subset C \setminus int\,(A) \tag{11}$$

.

Basta probar que $int\ (A \cup B) \supset int\,(A)$. Sea $x \in int\, A$, entonces existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \subset A$, pero esto implica que $U \subset A \cup B$, por lo que x está en $int\ (A \cup B)$.

Ahora si probemos que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &= \overline{(A \cup B)} \setminus int\,(A \cup B) \\
&= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \setminus int\,(A \cup B) \text{ por (9)} \\
&\subset \left[\overline{A} \setminus int\ (A \cup B)\right] \cup \left[\overline{B} \setminus int\ (A \cup B)\right] \text{ por (10)} \\
&\subset \left[\overline{A} \setminus int\ (A)\right] \cup \left[\overline{B} \setminus int\ (B)\right] \text{ por (11)} \\
&= \partial A \cup \partial B
\end{aligned}$$

Si definimos $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, $A = [0, 2]$ y $B = [1, 3]$, $\partial(A \cup B) = \{0, 3\}$, pero $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2, 3\}$. Por lo tanto $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$. $\square$

Problema 3:

Demostración:

Denotemos a la topología relativa de la topología metrizada por d en S de X como τ_X, a la topología en X metrizada por d como τ_d y a la topología de S metrizada por d como τ. Tenemos que probar que $\tau_X = \tau_d$.

Sea $U \in \tau_X$, entonces existen bolas $B(x_i, r_i) \in \tau$ tales que

$$\left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)\right) \bigcap X \quad = \quad U$$

Tomemos $u \in U$, entonces existe $I_u \subset I$, tal que$u \in B(x_i, r_i)$, con $i \in I_u$. Por el axioma de elección tomemos un $i_u \in I_u$ y definamos $B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u))$. Veamos que $r_{i_u} - d(x_{i_u}, u) > 0$ pues $r_{i_u} > d(x_{i_u}, u)$.

Es claro que cada $u \in U$, $B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u)) \in \tau_d$, pues cada $u \in X$. Además:

$$\bigcup_{u\in U} B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u)) \quad \supset \quad U$$

Probemos ahora que:

$$\bigcup_{u\in U} B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u)) \quad \subset \quad U$$

Sea $y \in \bigcup_{u\in U} B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u))$, entonces existe $u \in U$, tal que $y \in B(u, r_i - d(x_i, u))$, entonces

$$\begin{aligned} d(y, x_{i_u}) &\leq d(y, u) + d(u, x_{i_u}) \\ &< r_{i_u} - d(x_i, u) + d(u, x_{i_u}) \\ &= r_{i_u} \end{aligned}$$

Luego $y \in B(x_{i_u}, r_{i_u}) \subset \left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)\right)$, pero como $y \in X$, entonces $y \in \left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)\right) \bigcap X = U$, por lo que:

$$\bigcup_{u\in U} B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u)) \quad \subset \quad U$$

Por lo tanto

$$U \quad = \quad \bigcup_{u\in U} B(u, r_{i_u} - d(x_{i_u}, u)) \in \tau_d$$

Ya tenemos que $\tau_X \subset \tau_d$. Probemos ahora la otra contención.

Sea $V \in \tau_d$, entonces existen $B(x_i, r_i)$, con $x_i \in X$ e $i \in I$, tal que

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \right) \bigcap X, \end{aligned}$$

pues $V \subset X$, pero $\left(\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) \in \tau$, entonces $V = \left(\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) \bigcap X \in \tau_X$. Luego $\tau_X \supset \tau_d$. Por lo tanto $\tau_X = \tau_d$. $\square$

Problema 4:

DEMOSTRACIÓN:

Sea (S, d) un espacio métrico separable, por la proposición 2.1.4, (S, d) es segundo contable con τ la topología metrizada por d, lo cual quiere decir que existe una base $\mathcal{B}$ para la topología τ contable. Definamos: $\mathcal{B} := \{B(x_i, r_i) \subset S \mid i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$.

Sea $X \subset S$, y sean τ_X y τ_d como en el ejercicio anterior.

Veamos que $\mathcal{B}_X := \{B(x_i, r_i) \cap X \mid i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$, es una base contable para τ_X. Claramente $(B(x_i, r_i) \cap X) \in \tau_X$ por definición y $\mathcal{B}_X$ es contable porque podemos definir una función biyectiva $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_X$ como:

$$f(B(x_i, r_i)) = B(x_i, r_i) \cap X$$

Sea $U \in \tau_X$, entonces existen $V \in \tau$ tal que $V \cap X = U$, pero como $\mathcal{B}$ es base τ, entonces existe $I_V \subset I$ tal que:

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{i \in I_V} B(x_i, r_i) \\ \Rightarrow U &= \left(\bigcup_{i \in I_V} B(x_i, r_i) \right) \cap X \\ &= \bigcup_{i \in I_V} (B(x_i, r_i) \cap X) \end{aligned}$$

Pero para cada $i \in I_V$, $(B(x_i, r_i) \cap X) \in \mathcal{B}_X$. Luego $\mathcal{B}_X$ es una base contable para τ_X, lo cual implica que X es segundo contable con τ_X.

Por el ejercicio anterior sabemos que $\tau_d = \tau_X$, entonces tenemos que un espacio métrico (X, d) segundo contable con τ_d, así que podemos utilizar nuevamente la proposición 2.1.4 para asegurar que X es separable con τ_d que es igual a la topología relativa.

Por lo tanto, X es separable con la topología relativa. $\square$

Problema 5:

DEMOSTRACIÓN:

Gracias a que $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ es denso en $[a, b]$ y $\mathbb{Q}^c \cap [a, b]$, veamos que para cualquier partición $(x_0, x_1, ..., x_n)$ del intervalo $[a, b]$ (nótese que si $i \neq j$ entonces $x_i \neq x_j$), podemos tomar irracionales $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., n$. o irracionales $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Veamos que $\{S(1_{\mathbb{Q}}, u)\}_{u\in I}$ con I la red de refinamiento no converge a ningún punto. Tomemos la vecindad $B\left(b-a, \frac{b-a}{2}\right)$ de $b-a$, para cualquier partición $(x_0, x_1, ..., x_n) \in I$ del intervalo $[a, b]$, podemos tomar racionales $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., n$. Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (0)(x_i - x_{i-1}) \\ &= 0 \notin B\left(b-a, \frac{b-a}{2}\right) \end{aligned}$$

Así que $\{S(1_{\mathbb{Q}}, u)\}_{u\in I}$ no converge a $b-a$.

Ahora si nos tomamos la vecindad $B\left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ de 0, para cualquier partición $(x_0, x_1, ..., x_n) \in I$ del intervalo $[a, b]$, podemos tomar irracionales $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., n$. Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (1)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= b-a \notin B\left(0, \frac{b-a}{2}\right) \end{aligned}$$

Así que $\{S(1_{\mathbb{Q}}, u)\}_{u\in I}$ no converge a $b-a$.

Ahora en general, si tomamos $B\left(x, \frac{x}{2}\right)$, con $x \neq 0$, veamos que para cualquier partición $(x_0, x_1, ..., x_n) \in I$ del intervalo $[a, b]$, podemos tomar racionales $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., n$. Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (0)(x_i - x_{i-1}) \\ &= 0 \notin B\left(x, \frac{|x|}{2}\right) \end{aligned}$$

Así que $\{S(1_{\mathbb{Q}}, u)\}_{u\in I}$ no converge a para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, no es $1_{\mathbb{Q}}$ no es Riemann integrable en $[a, b]$. $\square$

Problema 6:

DEMOSTRACIÓN:

Primero veamos que τ es una topología.

- Por definición, $X, \emptyset \in \tau$
- Ahora si $U, V \in \tau$, entonces $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, pero como $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son finitos, entonces su unión es finita. Luego $U \cap V \in \tau$
- Sean $U_i \in \tau$, con $i \in I$, entonces

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \left(\bigcap_{i\in I} X \setminus U_i\right)$$

pero cada $X \setminus U_i$ es finito, entonces su intersección arbitraria es finita. Luego $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Ahora para cada $x \in X$, $X \setminus \{x\} \in \tau$, pues $\{x\}$ es finito, luego por definición $\{x\}$ es cerrado porque su complemento es abierto.

Por último veamos que τ no es metrizada alguna métrica. Sean $x,\, y \in X$ distintos y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que todos sus elementos son diferentes entre si y diferentes a x y y (esto se puede hacer gracias a que X es infinito).

Para cualquier vecindad N_x que contenga a x, existe un abierto $U \subset N_x$ tal que $x \in U$, entonces $X \setminus U$ es finito. Como $X \setminus U$ es finito, existe $x_j \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que para toda $i \geq j$, $x_i \in U$. Luego $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}^{i\geq j} \subset N_x$ por lo que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x. Análogamente se prueba que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a y.

Si τ fuera metrizada por d, entonces nos tomamos $B\left(x,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ que es vecindad de x, entonces para algún $j_1 \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}^{i\geq j_1} \subset B\left(x,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ y para $B\left(y,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ que es vecindad de y debería existir $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}^{i\geq j_2} \subset B\left(x,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$. Ahora si nos tomamos $j := max\{j_1,\, j_2\}$ tenemos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}^{i\geq j} \subset B\left(x,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}^{i\geq j} \subset B\left(y,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$, pero esto es una contradicción pues $B\left(x,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ y $B\left(y,\, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ son ajenas.

Por lo tanto τ no es metrizable. $\square$