Tarea 4
Análisis Real I

Gyivan Erick López Campos

12 de septiembre de 2017

Problema 1:
Si es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Para esto primero probemos que f es continua en el intervalo $[-1,\,1]$. Como $x\sin\frac{1}{x}$ es continua en todo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces solo basta ver que f es continua en 0. Pero

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \quad = \quad 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Por lo que f es continua en 0, así que f es continua en todo $\mathbb{R}$, particularmente en $[-1,\,1]$. Luego f es uniformemente continua en $[-1,\,1]$ por teorema visto en clase.
$\sharp$
Solo basta ver que f es uniformemente continua en $(-\infty,\,-1)\cup(1,\,\infty)$. Veamos que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \\ &\leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|+\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \\ &\leq 2,\,\forall\,|x|>1 \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon>0$, como f es uniformemente continua en $[-2,\,2]$ porque es continua en dicho intervalo, existe un $\delta_1>0$ tal que si $|x-y|<\delta_1$, entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $\forall x,\,y\in[-2,\,2]$. Definamos que $\delta:=\min\left\{1,\,\delta_1,\,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Sean $x,\,y\in\mathbb{R}$, tal que $|x-y|<\delta$, entonces $x,\,y\in[-2,\,2]$, $x,\,y\in(-\infty,\,-1)$ o $x,\,y\in(1,\,\infty)$, pues x y y distan a lo más en uno. Si $x,\,y\in[-2,\,2]$, $|x-y|<\delta<\delta_1$, entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Si $x,\,y\in(-\infty,\,-1)$, supongamos sin pérdida de generalidad de $x<y$, entonces por el teorema del valor medio existe $z\in[x,\,y]$ tal que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| &= |f'(z)| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f(x) - f(y)| &\leq 2|x-y| \\
&< 2\delta \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Análogamente si $x,\, y \in (1,\, \infty)$, supongamos sin pérdida de generalidad de $x < y$, entonces por el teorema del valor medio existe $z \in [x,\, y]$ tal que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| &= |f'(z)| \\
&\leq 2 \\
\Rightarrow |f(x) - f(y)| &\leq 2|x-y| \\
&< 2\delta \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Problema 2:

Para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,\, 1\}$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $f_n(0) = 0$ y $f_n(x) = 0$, para toda $x \in \left[\frac{2}{n},\, 1\right]$ (nótese que siempre podremos encontrar estas f_n por la interpolación de Lagrange). Ahora veamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f_0, i.e. $\forall x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= f_0(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, es claro que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Sea $x \in (0,1]$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{2}{x}$. Entonces para toda $n > N$, tenemos que $x > \frac{2}{n}$, entonces $f_n(x) = 0$ por definición, asi que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,\, \forall n > N.$$

Así que $\{f_n\} \to f_0$ puntualmente.

Sin embargo, $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f_0 porque $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq 1$ para toda $n \geq 2$, así que

$$\left\{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|\right\}_{n\geq 2} \nrightarrow 0$$

Problema 3:

Recordemos que si $|x| < 1$ entonces $x^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual quiere decir que para $\frac{1}{2}$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_x$, $|x^n| < \frac{1}{2}$.

Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equicontinuas en 1, lo cual quiere decir que para $\varepsilon := \frac{1}{2}$ existe una vecindad U que contiene a 1 tal que $|f_n(1) - f_n(x)| = |1 - f_n(x)| < \frac{1}{2}$, para toda $x \in U$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $x \in U$ tal que $|x| < 1$ (lo cual siempre lo podemos hacer porque U contiene a un abierto que contiene a 1), entonces para esa x, existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_x$, $|x^n| = |f_n(x)| < \frac{1}{2}$, pero esto genera una contradicción porque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &> |1 - f_n(x)| \\ &\geq 1 - |f_n(x)| \\ &> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no son equicontinuas en 1.

Problema 4:
Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equicontinuas en 0, entonces para $\varepsilon := \frac{1}{2}$, existe $B(0, r > 0)$ tal que para toda $x \in B(0, r) \cap [0, 1]$, $|f_n(x) - f_n(0)| = |\sin(nx)| < \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos n suficientemente grande tal que $\frac{\pi}{2n} < r$, entonces debería cumplirse que $\left|f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f_n(0)\right| = \left|\sin\left(n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)\right| < \frac{1}{2}$, pero esto $\left|\sin\left(n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$, contradicción. Por lo tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no son equicontinuas en 0.

Problema 5:
Sea A un conjunto denso en ninguna parte en (X, τ). Sea $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, entonces existe $V \subset U$ no vacío tal que $V \cap A = \emptyset$, así que $X \setminus V \supset \overline{A}$, pues $X \setminus V \supset A$ y es cerrado. Luego $V \cap \overline{A} = \emptyset$. Así que $\overline{A}$ es denso en ninguna parte.

Problema 6:
Para resolver este problema, aplicaré el teorema 2.5.4, el cual nos dice que basta probar que los irracionales son una intersección contable de abiertos de $\mathbb{R}$ con la topología usual, ya que $\mathbb{R}$ es la completación de los irracionales, al ser ellos densos en $\mathbb{R}$. Veamos que $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ con $q \in \mathbb{Q}$ es un subconjunto abierto con la topología usual de $\mathbb{R}$. Además

$$\begin{aligned} \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\} &= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ &:= \mathbb{I} \end{aligned}$$

La cual es una intersección numerable de abiertos porque $\mathbb{Q}$ es contable. Así que los irracionales son una G_δ de $\mathbb{R}$. Por lo que los irracionales son topológicamente completos.

Ahora definamos la métrica $e(x, y) = 0$ si $x = y$ y $e(x, y) = \frac{1}{n+1}$, donde n es el primer índice para el que las fracciones continuas de x y y difieren . Veamos que esta métrica induce la topología usual relativa para los irracionales y son completos con ella.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de irracionales, entonces, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{m>n\geq N_1}\{x_n, x_m\} < \frac{1}{2}$, lo cual implica que para toda $m, n > N_1$, x_m y x_n tienen el mismo entero en el índice 0, sea y_0 este número , así que todos los x_m tienen a y_0 en el índice 0, con $m > N_1$. Recursivamente, para $p \in \mathbb{N}$ existe $N_P \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{m>n\geq N_p}\{x_n, x_m\} < \frac{1}{p+1}$, lo cual implica que para toda $m, n > N_{p+1}$, x_m y x_n tienen los mismos enteros positivos hasta el índice $p - 1$, sea y_{p-1} ese número, así que todos los x_m tienen los mismos enteros positivos hasta el índice $p - 1$, con $m > N_p$. Sea y con desarrollo $(y_0, y_1, ...)$ en fracciones continuas, así que por propiedades de fracciones continuas, y es un número irracional (porque tiene desarrollo infinito).

Veamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces podemos tomar $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p+1} < \varepsilon$. Luego para toda $m > N_p$, $e(x_m, y) < \frac{1}{p+1} < \varepsilon$ porque todos los x_m van a tener al menos hasta el indice p números iguales entre ellos índice por índice y por como se definió y también va a tener al menos los primeros p números en su desarrollo de fracciones continuas con x_m, para cada m.

Por último veamos que e define $\tau_e = \tau'$, donde τ' es la topología relativa de los irracionales con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Basta probar que las bolas abiertas con la métrica usual d en $\mathbb{R}$, pertenecen a τ_e y las bolas abiertas con e pertenecen a τ'. Sea $B_d(x, r_x) \subset \mathbb{R}$. Entonces $B_d(x, r_x) \cap \mathbb{I} \in \tau'$. Si $B_d(x, r_x) \cap \mathbb{I} = \emptyset \in \tau_e$, así que supongamos que no es vacia. Sea $y \in B_d(x, r_x) \cap \mathbb{I}$. Recordemos que si $z < y$ irracionales, tal que tienen su desarrollo de fracciones continuas igual hasta el índice $p \in \mathbb{N}$, entonces para toda $z < y' < y$ con $y' \in \mathbb{I}$ su desarrollo de fracciones continuas tiene igual hasta el índice $p \in \mathbb{N}$ con y y $z(*)$. Con esto en mente, tomemos $0 < r_y < r_x - d(x, y)$ y tomemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} &= \min\{e(y, y+r_y), e(y, y-r_y)\} > 0 \\ & \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Entonces $B_e\left(y, \frac{1}{p+1}\right) \subset B_d(y, r_y) \cap \mathbb{I} \subset B_d(x, r_x) \cap \mathbb{I}$, porque todos los irracionales en $B_e\left(y, \frac{1}{p+1}\right)$ tienen al menos los primeros $p+1$ índices iguales que y, y todos los irracionales en $\mathbb{R} \setminus B_d(y, r_y)$ tienen a lo mas los primeros p indices iguales a $y$por $(*)$. Así que se cumplen las contenciones lo cual implica que $B_d(x, r_x) \cap \mathbb{I} \in \tau_e$, así que $\tau_e \supset \tau'$.
Ahora tomemos $x \in B_e(y, r_y)$. Supongamos que $x > y$. Sea $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $e(x, y) = \frac{1}{p_1+1}$ y $e(x, y+r_y) = \frac{1}{p_2+1}$, y tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que $p+1 := \max\{p_1, p_2\}$, entonces $B_d\left(x, \frac{1}{p+2}\right) \cap \mathbb{I} \subset B_e(y, r_y)$ por $(*)$. Así que $B_e(y, r_y)$ es abierto con la topología relativa, por lo que $B_e(y, r_y) \in \tau'$. Por lo tanto $\tau_e = \tau'$.