Tarea 5

Gyivan Erick López Campos

25 de septiembre de 2017

Ejercicio 1:

Sea X un conjunto infinito y supongamos que existe una $\sigma - \acute{a}lgebra$ contable infinita $\mathcal{F} := \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X. Si $\{B_i \setminus B_1\}_{i>1}$ es un conjunto infinito, definimos $A_1 = B_1^c$, si no, $\{B_i \setminus B_1^c\}_{i>1}$ debe ser infinito, de lo contrario $\mathcal{F}$ no sería infinito y definimos $A_1 = B_1$. Sea $I_1 := \{i \in \mathbb{N} : B_i \setminus A_1 \neq \emptyset\}$. Recursivamente, definimos:

$$A_j = \begin{cases} B_i \setminus A_{j-1}, \text{ con } i = \text{ínf}\{I_{j-1}\}, & \text{si } \{B_i \setminus A_{j-1}\}_{i\in I_{j-1}} \text{ es infinito.} \\ B_i^c \setminus A_{j-1} \text{ con } i = \text{ínf}\{I_{j-1}\} & \text{si no.} \end{cases}$$

Veamos que gracias a que $\mathcal{F}$ es infinito, $\mathcal{F}' := \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$ por que $A_1 \in \mathcal{F}$, entonces por inducción si $A_{j-1} \in \mathcal{F}$, luego $B_i \setminus A_{j-1} \in \mathcal{F}$, con $i = \text{ínf}\{I_{j-1}\}$ por propiedades de la $\sigma - \acute{a}lgebra$, y además $\mathcal{F}'$ es un conjunto disjunto a pares por como se definieron las A_i's. Sea $f : 2^{\mathcal{F}'} \to \mathcal{F}$, tal que $f(C) = \bigcup_{A_i\in C} A_i$. Como $\mathcal{F}'$ es contable, entonces $f(C)$ es unión contable de elementos de $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ para toda $C \in 2^{\mathcal{F}'}$, luego $f(C) \in \mathcal{F}$ así que f está bien definida. Además f es inyectiva si $f(C_1) = f(C_2)$, entonces $\bigcup_{A_i\in C_1} A_i = \bigcup_{A_i\in C_2} A_i$, pero como $\mathcal{F}'$ es un conjunto disjunto a pares, para cada $A_i \in C_1$, $A_i \in C_2$ y viceversa, entonces $C_1 = C_2$. Esto implica que $\left|2^{\mathcal{F}'}\right| \le |\mathcal{F}|$, generando una contradicción porque $2^{\mathcal{F}'}$ tiene la cardinalidad del continuo al ser conjunto potencia de un conjunto contable infinito y $\mathcal{F}$ un conjunto contable. $\square$

Ejercicio 2:

Para probar que f es medible, tomemos $U \subset \mathbb{R}$ abierto y probemos que $f^{-1}(U)$ es un conjunto medible. Veamos para cada $q \in \mathbb{Q} \cap U$ existe $r_q > 0$ racional tal que $B(q, r_q) \subset U$ y como $\mathbb{Q} \cap U$ es denso en U,

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap U} B(q, r_q) = U.$$

Si demostramos que cada $B(q, r_q)$ es medible, con $q \in \mathbb{Q} \cap U$, entonces:

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap U} f^{-1}(B(q, r_q)) = f^{-1}(U), \text{ es medible al ser unión contable de conjuntos medibles.}$$

Demostremos entonces que cada bola $B(q, r_q)$ es medible, con $q \in \mathbb{Q} \cap U$. Veamos que para todo racional q_1 y q_2, $\{x : f(x) \ge q_1\}$ y $X \setminus \{x : f(x) \ge q_2\} = \{x : f(x) < q_2\}$ son medibles, entonces $\{x : f(x) \ge q_1\} \cap \{x : f(x) < q_2\} = \{x : q_2 > f(x) \ge q_1\}$ es contable porque es intersección contable de conjuntos medibles y como $f^{-1}(B(q, r_q)) = \{x : q + r_q > x > q - r_q\}$, entonces:

$$f^{-1}(B(q, r_q)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x : q + r_q > x \ge q - r_q - \frac{1}{n}\right\}$$

Luego como $q - r_q - \frac{1}{n}$, $q + r_q \in \mathbb{Q}$ entonces $f^{-1}(B(q, r_q))$ es medible al ser unión contable de conjuntos medibles. Por lo tanto $f^{-1}(U)$ es medible. Así que f es medible. $\square$

Ejercicio 3:

Para resolver el inciso a), definamos $F+$ y $F-$ los conjuntos tal que $f(x)=\infty$ y $f(x)=-\infty$ respectivamente. De la misma manera definamos $G+$ y $G-$ los conjuntos tales que $g(x)=\infty$ y $g(x)=-\infty$ respectivamente. Probemos que estos conjuntos son medibles.

Como $g^{-1}((n,\infty)) := \{x\in X:\ g(x)>n\}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}((n,\infty))$ es medible porque es intersección contable de conjuntos medibles. Pero $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}((n,\infty)) = G+$, entonces $G+$ es medible. Análogamente se deduce que $G-$, $F+$, $F-$ son medibles.

Tomemos $Y = X\setminus (G+\cup G-\cup F+\cup F-)$, entonces Y va a ser el conjunto donde sus conjuntos medibles toman valores finitos para f y g. Luego va a estar bien definida la función $h := f-g$ en Y, pues es resta de dos valores finitos y va a ser medible porque es resta de dos funciones medibles.

Ahora para a), el conjunto $\{x:\ f(x)<g(x)\}$, se puede ver como la unión: $h^{-1}((-\infty,0))\cup(F+\setminus G+)\cup(F-\cap G-)$, pero $h^{-1}((-\infty,0))$, es un conjunto medible porque $(-\infty,0)$ es un abierto en $\mathbb{R}$ y h es medible y por propiedades de la sigma álgebra $(F+\setminus G+)$ y $(F-\cap G-)$ también lo son. Luego su unión es un conjunto contable, así que $h^{-1}((-\infty,0))\cup(F+\setminus G+)\cup(F-\cap G-)$ es medible.

De igual manera, veamos que $\{x:\ f(x)=g(x)\}$, se puede ver como la unión: $h^{-1}((-\infty,0)\cup(0,\infty))\cup(F+\cap G+)\cup(F-\cap G-)$, y $h^{-1}((-\infty,0)\cup(0,\infty))$ es medible porque h es imagen inversa de un abierto y h es medible y la intersección de conjuntos medibles es medible, entonces $(F+\cap G+)$ y $(F-\cap G-)$ son medibles, luego $h^{-1}((-\infty,0)\cup(0,\infty))\cup(F+\cap G+)\cup(F-\cap G-)$ es medible porque es unión de conjuntos medibles.

Por último para el inciso b), sea f_n una sucesión de funciones medibles y sea $F\subset X$ el conjunto de las x tal que $f_n(x)$ converge a un valor finito cuando $n\to\infty$. Definamos f sobre F como:

$$f = \lim_{n\to\infty}\sup f_n,$$

entonces f es medible por proposición vista en clase y

$$f|_F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

porque si $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=y$, quiere decir que dado $x\in F$, para todo $\varepsilon>0$, para el intervalo abierto $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$, existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que $f_n(x)\in(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$, para toda $n>N_\varepsilon$. Ahora, supongamos que $f(x)=z$, entonces tenemos que $z=\lim_{n\to\infty} b_n$, donde $b_n=\sup\{f_n(x),\, f_{n+1}(x),\ldots\}$, pero para cada $k>N$, $b_k\in[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$, entonces $z\in[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$ porque el ínfimo de un compacto está en el compacto, y como es para todo $\varepsilon>0$ entonces $z=y$.

Por otro lado, como $f-f_n$ también es una función medible por otra proposición vista en clase, entonces si nos tomamos $\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$, $(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$ es un conjunto medible y además:

$$F = \bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$$

porque si $x\in F$ entonces $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, lo cual indica que para toda $r\in\mathbb{N}$, existe $N_r\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n>N_r$, $|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{r}$, luego $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$, y como es para toda $r\in\mathbb{N}$, se tiene que $x\in\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$.

Por lo cual $F \subset \bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$, ahora si $x \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$ entonces para todo $r\in\mathbb{N}$, $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$. Luego existe $n_r\in\mathbb{N}$ tal que $x\in(f-f_{n_r})^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$, lo cual quiere decir que existe $y\in\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$ tal que $(f-f_{n_r})(x)=f(x)-f_{n_r}(x)=y$. Ahora dado $\varepsilon>0$ existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r}<\varepsilon$, entonces $|f(x)-f_{n_r}(x)|<\frac{1}{r}$ y para $j>r$, tenemos que $\left|f(x)-f_{n_j}(x)\right|<\frac{1}{j}<\frac{1}{r}<\varepsilon$, así que $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. Por lo tanto $x\in F$, lo que implica que $F=\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$.

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$ es unión contable de conjuntos contables, entonces es contable, y $\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f-f_n)^{-1}\left(-\frac{1}{r},\,\frac{1}{r}\right)$ es intersección de conjuntos contables, entonces es contable. Luego F es contable. $\square$

Ejercicio 4:

Primero probemos que M es una $\sigma-\acute{a}lgebra$. Como $X^c=\emptyset$ es a lo mas contable, entonces $X\in M$. Ahora si $E\in M$, entonces E es contable o E^c es contable, entonces $(E^c)^c=E$ es contable o E^c es contable, luego $E^c\in M$. Si $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$, entonces sea $I\subset\mathbb{N}$ tal que E_i es a lo mas contables, para toda $i\in I$, así que E_i es no contable con $i\in\mathbb{N}\setminus I$. Así que:

$$E \;=\; \left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus I}E_i\right).$$

Si $\mathbb{N}\setminus I=\emptyset$, entonces E es unión contable de conjuntos contables, E es contable. de lo contrario

$$E^c \;=\; \left(\bigcap_{i\in I}E_i^c\right)\cap\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}\setminus I}E_i^c\right).$$

Por lo que $E^c\subset\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}\setminus I}E_i^c\right)$, pero cada E_i^c es contable, entonces E^c es subconjunto de unión contable de conjuntos contables. Así que $E\in M$ pues es a lo más contable. Por lo tanto M es una $\sigma-\acute{a}lgebra$.

Ahora probemos que μ es una medida en M. Sea $A\in M$ y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un conjunto disjunto por pares tal que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=A$. Si A es a lo mas contable, entonces cada A_i debe ser contable pues $A_i\subset A$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i) &= 0\\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Si A no es contable, entonces A^c lo es, por lo que al menos existe un A_i es no contable. Si existieran A_i, A_j no contables con $i\neq j$, entonces A_i^c y A_j^c son contables, entonces su unión $A_i^c\cup A_j^c$ es contable, pero como A_i y A_j son disjuntos, $A_i^c\cup A_j^c=X$, lo cual es una contradicción con que X era no contable. Luego solo existe un A_i que no es contable. Así que:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i) &= 1\\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Con esto demostramos que μ es contable aditiva y por definición μ no puede tomas valores negativos, así que μ es una medida.

Sea $f:\,X\to\mathbb{R}$, es medible si para toda $x\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{x\})$ es contable o $\left(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{x\})\right)^c$ es contable, pero $\left(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{x\})\right)^c=f^{-1}(x)$, así que para toda $x\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(x),\,f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{x\})\in M$. Ahora si tomamos $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\,f^{-1}(x)\text{ no es contable}\right\}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \sup \int_X s\,d\mu \\ &= \sup\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu\left(A_i\right)\right),\end{aligned}$$

con s función simple tal que $0 \leq s \leq f$. Pero el $\sup\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu\left(A_i\right)\right)$ se alcanza cuando $n \to \infty$ y $s^{-1}\left(x\right)$ no es contable, para cada $x \in B$, pues así $\alpha_i\,\mu\left(A_i\right) \to x \cdot 1 = x$ inferiormente, que es el valor máximo que podría tener. Luego $\sup\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu\left(A_i\right)\right) = \sum_{x\in X} x\,\mu\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = \sum_{x\in B} x$ pues

$$\mu\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in B^c \end{cases}$$

por definición de μ. Por lo tanto:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{x\in B} x. \square$$

Ejercicio 5:

Como

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : \left|f_k\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

para toda $\varepsilon > 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_\varepsilon$, $\mu\left(x \in X : \left\{\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \varepsilon^2$. Particularmente, para cada $\frac{1}{j}$, con $j \in \mathbb{N}$, existe $N_{j^{-1}} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(x \in X : \left\{\left|f_{N_{j^{-1}}}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < j^{-2}$$

Definamos, $k_j = \inf\left(N_{j^{-1}}\right) + j$. Si $i > j$, entonces $\inf\left(N_{i^{-1}}\right) \geq \inf\left(N_{j^{-1}}\right)$ porque:

$$\begin{aligned}\mu\left(x \in X : \left\{\left|f_{N_{i^{-1}}}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{i}\right\}\right) &< i^{-2} \\ &< j^{-2},\end{aligned}$$

así que $\inf\left(N_{i^{-1}}\right) + i > \inf\left(N_{j^{-1}}\right) + j$, que es lo mismo que $k_i > k_j$. Luego $\left\{f_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\left\{f_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Sea

$$A_j = \bigcup_{i\geq j} \left\{x \in X : \left|f_{k_i}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{i}\right\},$$

claramente si $n > m$, y $x \in A_n$, existe $i \geq n > m$ tal que $\left|f_{k_i}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{i}$, entonces $x \in A_m$, así que $A_m \supset A_n$ (1), lo cual implica que $\mu(A_m) \geq \mu(A_n)$. Sea

$$A = \bigcap_{j\geq 1} A_j,$$

entonces por sub-aditividad tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(A_i) &\leq i^{-2} + (i+1)^{-2} + \cdots \\ &= \sum_{j\geq i} (i+j)^{-2} \\ &= 2 - \sum_{j=1}^{i-1} (j)^{-2} \qquad (2)\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\left(\bigcap_{j\geq 1} A_j\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)\,,\ \text{por } (1) \\ &= 0, \text{ por } (2)\end{aligned}$$

Así que A es de medida 0. Si tomamos $x \in X \setminus A$, entonces $f_{k_j}(x) \to f(x)$ porque la sucesión original convergía.

Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que siempre podemos tomar $j \in \mathbb{N}$ tal que $j^{-2} < \varepsilon$ y $x \notin A_j$, porque $x \notin A$ y (1).

Luego para todo $i \geq j$, $x \notin A_i$ por (1) nuevamente, así que

$$\begin{aligned}|f_{k_i}(x) - f(x)| &< i^{-2} \\ &\leq j^{-2} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_{k_j}\}$ converge uniformemente a f en $X \setminus A$. Así que $\{f_{k_j}\}$ converge casi uniformemente a f. $\square$

Problema 6:

(a) Claramente f es acotada en $[a, b]$ por que para toda $x \in [a, b]$, tenemos que

$$|f(a) - f(x)| + |f(x) - f(b)| \leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty.$$

Luego $|f(x)| - |f(b)| < |f(x) - f(b)| < \infty$, así que $|f(x)| < \infty$.

Ahora probemos que existen funciones g y h crecientes acotadas tal que $f = g - h$.

Definamos $g(x) = \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,x]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,x]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, donde $\mathcal{P}$ es partición del intervalo $[a, x]$ si $x \neq a$ y $g(a) = 0$. Veamos que $x,\, y \in [a,\, b]$ si $a \neq x < y$, entonces:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,x]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,x]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,x]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,x]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(y)| \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,y]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,y]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \end{aligned}$$

así que $g(x) \leq g(y)$. Por lo que g es creciente en $[a,\, b]$, además como:

$$\begin{aligned} g(b) &= \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,b]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,b]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &< \infty \end{aligned}$$

porque f es de variación acotada, entonces $0 \leq g(x) \leq g(b) < \infty$, para toda $x \in [a,\, b]$, así que g es acotada.

Ahora definamos $h = g - f$, como f y g son acotadas, entonces h es acotada, además si $x,\, y \in [a,\, b]$, con $x < y$, se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) + f(y) - f(x) &= \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,x]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,x]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + f(y) - f(x) \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,x]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,x]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sup_{\mathcal{P}_{[a,\,y]}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P}_{[a,\,y]})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= g(y) \\ \Rightarrow 0 &\leq g(y) - f(y) - g(x) + f(x) \\ &= h(y) - h(x), \end{aligned}$$

Así que h es creciente en $[a,\, b]$. Luego $f = g - h$.

Por otro lado, para toda función $s : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ acotada creciente tenemos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in [a,\, c)$ tal que $s(x_\varepsilon) + \varepsilon > \sup_{x \in [a,\, c)} \{s(x)\}$, luego para toda $x \in (x_\varepsilon,\, c)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon + \sup_{x \in [a,\, c)} \{s(x)\} &> s(x) \\ &\geq s(x_\varepsilon) \\ &> \sup_{x \in [a,\, c)} \{s(x)\} - \varepsilon \\ \Rightarrow \infty > \lim_{x \to c^-} s(x) &= \sup_{x \in [a,\, c)} \{s(x)\} > -\infty. \end{aligned}$$

De forma análoga, para toda $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in (c,\, b]$ tal que $s(x_\varepsilon) - \varepsilon < \inf_{x \in (c,\, b]} \{s(x)\}$, luego para toda $x \in (c,\, x_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in(c,\,b]}\{s(x)\}-\varepsilon &< s(x_\varepsilon)\\
&\leq s(x)\\
&< \inf_{x\in(c,\,b]}\{s(x)\}+\varepsilon\\
\Rightarrow \infty > \lim_{x\to c^+} s(x) &= \inf_{x\in(c,\,b]}\{s(x)\} > -\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto los límites $\lim_{x\to c^+} s(x)$, $\lim_{x\to c^-} s(x)$ existen.

Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^+} g(x) - \lim_{x\to c^+} h(x)\\
&= \inf_{x\in(c,\,b]}\{g(x)\} - \inf_{x\in(c,\,b]}\{h(x)\}\\
&\text{y}\\
\lim_{x\to c^-} f(x) &= \lim_{x\to c^-} g(x) - \lim_{x\to c^-} h(x)\\
&= \sup_{x\in[a,\,c)}\{g(x)\} - \sup_{x\in[a,\,c)}\{h(x)\},
\end{aligned}$$

Así que ambos límites existen. $\square$

(b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona creciente. Gracias al inciso (a) sabemos que para toda $c\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\}$, así que existen, tomando $[a,\,b]$ tal que $c\in(a,b)$. Definamos $D := \{c\in\mathbb{R}: \lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)\}$, que es el conjunto de discontinuidades de f, entonces:

$$\begin{aligned}
\infty &> f(c+1)\\
&\geq \lim_{x\to c^+} f(x)\\
&= \inf_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}\\
&> \sup_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\}\\
&= \lim_{x\to c^-} f(x)\\
&\geq f(c-1) > -\infty
\end{aligned}$$

Para cada $c\in D$, definimos $I_c = \left(\sup_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\},\, \inf_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}\right)$, así que por el axioma de elección podemos tomar $q_c\in I_c\cap\mathbb{Q}$. Definamos $g:\, D\to\mathbb{Q}$, tal que $g(c)=q_c$. Sea $c,\,d\in D$ y sin pérdida de generalidad tomemos $c>d$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^+} f(x) &> \lim_{x\to c^-} f(x)\\
&\geq f\left(c-\frac{c-d}{2}\right) = f\left(d+\frac{c-d}{2}\right)\\
&\geq \lim_{x\to d^+} f(x)\\
&> \lim_{x\to c^-} f(x)
\end{aligned}$$

Así que $I_c\cap I_d=\emptyset$, por lo que $q_c\neq q_d$. Luego g es inyectiva, que implica que $|D|\leq|\mathbb{Q}|$, de manera que D es a lo más contable.

Si f es monótona decreciente, para toda $c\in\mathbb{R}$, podemos tomar $[a,\,b]$ tal que $c\in(a,\,b)$ y dado cualquier $\varepsilon>0$, existe $x_\varepsilon\in[a,\,c)$

tal que $f(x_\varepsilon) - \varepsilon < \text{ínf}_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\}$, luego para toda $x \in (x_\varepsilon,\, c)$:

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\} - \varepsilon &< f(x) \\
&\leq f(x_\varepsilon) \\
&< \inf_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\} + \varepsilon \\
\Rightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) &= \inf_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\}
\end{aligned}$$

De forma análoga, para toda $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in (c,\, b]$ tal que $f(x_\varepsilon) + \varepsilon > \sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}$, luego para toda $x \in (c,\, x_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\} + \varepsilon &> f(x) \\
&\geq f(x_\varepsilon) \\
&> \sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\} - \varepsilon \\
\Rightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) &= \sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto los límites $\lim_{x\to c^+} s(x)$, $\lim_{x\to c^-} s(x)$ existen.

Sea $D := \{c \in \mathbb{R} : \lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)\}$, que es el conjunto de discontinuidades de f, entonces:

$$\begin{aligned}
-\infty &< f(c+1) \\
&\leq \lim_{x\to c^+} f(x) \\
&= \sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\} \\
&< \inf_{x\in[a,\,c)}\{f(x)\} \\
&= \lim_{x\to c^-} f(x) \\
&\leq f(c-1) < \infty
\end{aligned}$$

Para cada $c \in D$, definimos $I_c = \left(\sup_{x\in(c,\,b]}\{f(x)\}\,,\ \text{ínf}_{[a,\,c)}\{f(x)\}\right)$, así que por el axioma de elección podemos tomar $q_c \in I_c \cap \mathbb{Q}$. Definamos $g:\ D \to \mathbb{Q}$, tal que $g(c) = q_c$. Sea $c,\, d \in D$ y sin pérdida de generalidad tomemos $c > d$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^+} f(x) &< \lim_{x\to c^-} f(x) \\
&\leq f\left(c - \frac{c-d}{2}\right) = f\left(d + \frac{c-d}{2}\right) \\
&\leq \lim_{x\to d^+} f(x) \\
&< \lim_{x\to c^-} f(x)
\end{aligned}$$

Así que $I_c \cap I_d = \emptyset$, por lo que $q_c \neq q_d$. Luego g es inyectiva, que implica que $|D| \leq |\mathbb{Q}|$, de manera que D es a lo más contable. $\square$