Tarea 6

Gyivan Erick López Campos

1 de octubre de 2017

Problema 1:

(a) Sea $M \in [0, \infty]$ y definamos

$$s(x) = \begin{cases} M & \text{si } f(x) > M \\ 0 & \text{si } f(x) \leq M \end{cases}$$

Como $s(x) \leq f(x)$ y s es una función simple positiva, entonces por definición de integral de Lebsgue tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_X f\, d\mu &\geq \int_X s\, d\mu \\ &= 0 \cdot \mu(\{x : f(x) \leq M\} + M \cdot \mu(\{x : f(x) > M\})) \\ &= M \cdot \mu(\{x : f(x) > M\}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \quad \textstyle\int_X f\, d\mu &= \mu(\{x : f(x) > M\}) \ \square \end{aligned}$$

(b) Sea

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Al ser f_k positivas, entonces $f : X \to [0, \infty]$ siempre va a estar bien definida para todo $x \in X$, porque la serie o converge a un valor finito se va al ∞. Además si definimos

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

$g_n : X \to [0, \infty]$ es un función medible porque es suma finita de funciones medibles y $g_n \uparrow f$, entonces$f$ es medible por el teorema de la convergencia monótona y

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k &= \int_X f\, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu. \end{aligned} \tag{1}$$

Como

$$\int_X g_n d\mu \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu,$$

porque gracias al corolario de la convergencia monótona de Lebesgue vista en clase, la integral de la suma finita de funciones es la suma de las integrales de cada funciones, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu \\ &= \sum_{nk=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu. \end{aligned} \tag{2}$$

Luego de (1) y (2) se obtiene que

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu. \square$$

Problema 2:

Sea $E \in M \ \sigma - \acute{a}lgebra$, y sea $\mathcal{P}_1$ el conjunto de las particiones finitas de E y $\mathcal{P}_2$ el conjunto de todas las particiones contables de E. Claramente $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, entonces como:

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \sup_{\{E_i\}\subset\mathcal{P}_1} \left\{\sum |\mu(E_i)|\right\} \\ &\text{y} \\ |\mu(E)| &= \sup_{\{E_i\}\subset\mathcal{P}_2} \left\{\sum |\mu(E_i)|\right\} \\ \Rightarrow \lambda(E) &\leq \mu(E) \\ \Rightarrow \lambda &\leq |\mu| \end{aligned}$$

Ahora probemos la otra desigualdad. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_2$, como $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\mu\left(E_{\{i\}}\right)\right|$ converge, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que

$$\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} |\mu(E_i)| \quad < \quad \varepsilon. \tag{3}$$

Definamos $F_i = E_i$ para $i = 1, 2, ..., N_\varepsilon - 1$ y

$$F_{N_\varepsilon} \quad = \quad \bigcup_{i=N_\varepsilon}^{\infty} E_i,$$

así que $\{F_i\}_{i=1}^{N_\varepsilon} \in \mathcal{P}_1$, por lo que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\mu(E_i)| &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\mu(F_i)| \\ &\leq \lambda(E). \end{aligned} \tag{4}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}|\mu(E_i)| + \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty}|\mu(E_i)| \\
&< \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}|\mu(E_i)| + \varepsilon \text{ por } (3) \\
&\leq \lambda(E) + \varepsilon \text{ por } (4)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\square$

$$\begin{aligned}
\sup_{\{E_i\}\subset\mathcal{P}_2}\left\{\sum|\mu(E_i)|\right\} &\leq \lambda(E) + \varepsilon, \text{ pero como es}\forall\varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \sup_{\{E_i\}\subset\mathcal{P}_2}\left\{\sum|\mu(E_i)|\right\} &\leq \lambda(E) \\
\Rightarrow \mu(E) &\leq \lambda(E) \\
\Rightarrow |\mu| &\leq \lambda \\
\Rightarrow |\mu| &= \lambda
\end{aligned}$$

Se concluye que solo basta tomar el supremo de las particiones finitas de los conjuntos medibles para calcular su medida con respecto a $|\mu|$. $\square$