Tarea 7

Gyivan Erick López Campos

9 de octubre de 2017

Problema 1:

Definimos a $\mu([a,\, b)) := g(b) - g(a)$, entonces como g es creciente, μ va ser la medida especificada. Sea λ la medida de Lebesgue de$\mathbb{R}$.
Si definimos a $\mu_a(A) = 2\lambda(A)$, y $\mu_c(A) = \mu(A) - 2\lambda(A)$, claramente $\mu(A) = \mu_a(A) + \mu_c(A)$. Además μ_c es una medida positiva porque para todo intervalo $[a,\, b)$, $g(b) - g(a) - 2(b-a) \geq 0$ por como se definió g.

Probemos que $\mu_a \ll \lambda$ y $\mu_c \perp \lambda$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) = 0$, entonces $\mu_c(A) = 2\lambda(A) = 0$. Luego $\mu_a \ll \lambda$.

Veamos que

$$\begin{aligned}
\mu_c((0,1)) &= \mu_c\left(\bigcup_{n>3}\left[\frac{1}{n},\, 1\right)\right) \\
&\leq \sum_{n>3}\mu_c\left(\left[\frac{1}{n},\, 1\right)\right) \\
&= \sum_{n>3}\left[g(1) - g\left(\frac{1}{n}\right) - 2\lambda\left(\left[\frac{1}{n},\, 1\right)\right)\right] \\
&= \sum_{n>3}\left[(2+1) - \left(\frac{2}{n}+1\right) - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

entonces $\mu_c((0,1)) = 0$.

Probemos que μ_c se acumula en $\{0,\, 1\}$, esto es que para todo E boleriano tal que $E \cap \{0,\, 1\} = \emptyset$ se tiene que $\mu_c(E) = 0$. Sea E boleriano tal que $E \cap \{0,\, 1\} = \emptyset$ entonces:

Veamos que:

$$E \quad \subset \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,\, -n+1) \cup (0,\, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{n},\, n+1\right)$$

pero $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,\, 0) \cup (0,\, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(n,\, n+1]$ es un conjunto de borel porque es unión contable de elementos de borel, así que es medible. Luego:

$$\mu_c(E) \quad \leq \quad \mu_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,\, 0) \cup (0,\, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{n},\, n+1\right)\right) \text{(monoticidad)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,\,0)\right)+\mu_c\left((0,\,1)\right)+\mu_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{n},\,n+1\right)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_c\left([-n,\,0)\right)+\mu_c\left((0,\,1)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_c\left(\left[1-\frac{1}{n},\,n+1\right)\right) \text{ (subaditividad)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu\left([-n,\,0)\right)-2\lambda\left([-n,\,0)\right)\right) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu\left(\left[1-\frac{1}{n},\,n+1\right)\right)-2\lambda\left(\left[1-\frac{1}{n},\,n+1\right)\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(g\left(0\right)-g\left(-n\right)-2\left(n\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(g\left(n+1\right)-g\left(1-\frac{1}{n}\right)-2\left(n-\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-2n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+2-2+\frac{2}{n}-2n-\frac{2}{n}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo que $\mu_c\left(E\right)=0$. Así que μ_c se acumula en $\{0,\,1\}$.

Por último veamos que λ se acumula en $\mathbb{R}\setminus\{0,\,1\}$, pero esto es cierto porque para cualquier conjunto de Borel E, tal que $E\subset\{0,\,1\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(E\right) &\leq \lambda\left(\{0,\,1\}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

entonces λ se acumula en $\mathbb{R}\setminus\{0,\,1\}$ y se sigue que $\mu_c\perp\lambda$. □

Problema 2:

Como $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, basta probar que para cualquier punto$x\in\mathbb{R}$ y cualquier sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to x$ se tiene que $F\left(x_n\right)\to F\left(x\right)$. Definamos $f_n=f\chi_{(-\infty,\,x_n)}$, entonces es claro que $f_n\left(y\right)=f\left(y\right)$ para toda $y\in(-\infty,\,x_n)$, sea $y\in(-\infty,\,x)$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n>N$, $x_n\in(y,\,x+(x-y))=(y,\,2x-y)$, así que como $y\in(-\infty,\,x_n)$, $f_n\left(y\right)=f\left(y\right)$, luego $f_n\to f$ en $(-\infty,\,x)$. Como $\mu\left(\{x\}\right)\leq C\lambda\left(\{x\}\right)$ para alguna $C>0$, entonces $\mu\left(\{x\}\right)=0$.

Así que $f_n\to f$ en c.t.p. en $(-\infty,\,x]$. Además como f es integrable, entonces $|f|$ es integrable y $|f_n|\leq|f|$ en $(-\infty,\,x]$, así que por el teorema de convergencia dominada:

$$
\begin{aligned}
F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}fd\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}f_nd\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}f\chi_{(-\infty,\,x_n)}d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_n}f\chi_{(-\infty,\,x_n)}d\mu+\int_{x_n}^{x}f\chi_{(-\infty,\,x_n)}d\mu\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x_n}fd\mu \\
&= \lim_{n\to\infty}F\left(x_n\right)
\end{aligned}
$$

Luego F es continua en toda $x\in\mathbb{R}$. □

Problema 3:

Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq -h$, entonces $-f_n^- \geq -h$ lo que implica que $f_n^- \leq h$. Luego por teorema visto en clase, si $|f_n^-| = f_n^- \leq h = |h|$, con $h \in L^1$ y f_n^- medible, entonces f_n^- es integrable, lo cual quiere decir que $\int_X f_n^- d\mu < \infty$, así que

$$\int_X f_n d\mu \quad = \quad \int_X f_n^+ d\mu - \int_X f_n^- d\mu$$

está bien definida porque no nos puede quedar $\infty - \infty$.

Ahora bien, es claro que $\lim_{n\to\infty} f_n^- = f^-$, entonces como $f_n^- \leq h$ y f_n^-, $h \in L^1$, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que f^- es integrable, lo cual quiere decir que $\int_X f^- d\mu < \infty$, así que

$$\int_X f d\mu \quad = \quad \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

está bien definida porque no nos puede quedar $\infty - \infty$.

Por último, veamos que $f_n \geq -h$ implica que $f_n + h \geq 0$, dando lugar a que $f_n + h \in M^+$. Luego:

$$\begin{aligned}
\int_X h d\mu + \int_X f d\mu &= \int_X (h+f)\, d\mu \\
&= \int_X \liminf_n (h+f_n)\, d\mu \\
&\leq \liminf_n \int_X (h+f_n)\, d\mu \text{ aplicando el lema de Fatou} \\
&= \liminf_n \left(\int_X h d\mu + \int_X f_n d\mu \right) \\
&= \int_X h d\mu + \liminf_n \int_X f_n d\mu \\
\Rightarrow \int_X f d\mu &\leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \square
\end{aligned}$$

Problema 4:

Primero observemos que $f(s) = \frac{s}{1+s}$ es no decreciente en $[0,\infty]$ porque $f'(s) = \frac{(1+s)+s}{(1+s)^2} = \frac{2s+1}{(1+s)^2} > 0$ para toda $s \in [0,\infty)$ y como f' es continua en $[0,\infty)$, entonces $f'(\infty) = \lim_{s\to\infty} f'(s) = 0$.

Supongamos que $f_n \to f$ en medida, entonces para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ y $\alpha > 0$, $\mu(E_n(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$, con $E_n(\alpha) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$.

Veamos que $(E_n(\alpha))^c = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \alpha\}$, entonces como $f(s) = \frac{s}{1+s} \geq 0$ es no decreciente para toda $s \in [0,\infty]$tenemos que por teorema visto en clase (si $|f| \leq |g| \Rightarrow \int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| d\mu$) :

$$\int_{(E_n(\alpha))^c} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \quad \leq \quad \int_{(E_n(\alpha))^c} \frac{\alpha}{1+\alpha} d\mu \tag{1}$$

$$\int_{E_n(\alpha)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \quad \leq \quad \int_{E_n(\alpha)} d\mu \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{E\subset X} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu & (3)\\
\int_{E_n(\alpha)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu &\geq \int_{E_n(\alpha)} \frac{\alpha}{1+\alpha} d\mu & (4)
\end{aligned}
$$

Como $\mu(X) < \infty$, y $\frac{\alpha}{1+\alpha} \to 0$ si $\alpha^{-} \to 0$, podemos tomar $\alpha > 0$ suficientemente pequeña tal que tal que $\frac{\alpha}{1+\alpha}\mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego para toda $n > N$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_X \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu\right| &= \int_{E_n(\alpha)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu + \int_{(E_n(\alpha))^c} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \text{ por (3)}\\
&\leq \int_{E_n(\alpha)} d\mu + \int_{(E_n(\alpha))^c} \frac{\alpha}{1+\alpha} d\mu \text{ por (1)y (2)}\\
&= \mu(E_n(\alpha)) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\mu((E_n(\alpha))^c)\\
&= \mu(E_n(\alpha)) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\mu((E_n(\alpha))^c)\\
&\leq \mu(E_n(\alpha)) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\mu(X)\\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Así que $q(f_n - f) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ahora supongamos que $q(f_n - f) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces para todo ε, $\alpha > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo entero $n > N$, $\left|\int_X \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} d\mu\right| < \varepsilon \frac{\alpha}{1+\alpha}$, luego:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\alpha}{1+\alpha} &> \left|\int_X \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu\right|\\
&= \int_X \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \text{ por (3)}\\
&= \int_{E_n(\alpha)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu + \int_{(E_n(\alpha))^c} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu\\
&\geq \int_{E_n(\alpha)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \text{ por (3)}\\
&\geq \int_{E_n(\alpha)} \frac{\alpha}{1+\alpha} d\mu \text{ por (4)}\\
&= \frac{\alpha}{1+\alpha}\mu(E_n(\alpha))\\
\Rightarrow \varepsilon &> \mu(E_n(\alpha)) \ \forall n > N, \text{ pues } \tfrac{\alpha}{1+\alpha}>0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f_n \to f$ en medida. □

Problema 5:

Veamos que si μ es la medida que cuenta y $A \in 2^X$, tal que $\mu(A) = 0$ obliga a que $A = \emptyset$, luego $\lambda(\emptyset) = 0$, porque el vacío es contable por vacuidad. Así que $\lambda \ll \mu$. Pero no existe $f \in L^1(M)$ tal que:

$$
\lambda(E) = \int_E f d\mu,
$$

porque si existiera entonces tomando $y \in X$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 = \lambda(\{y\}) &= \int_{\{y\}} f d\mu \\
&= \int_X f(x)\, \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu \\
&= f(y)\, \chi_{\{y\}}(y) \int_X d\mu \\
&= f(y)\, \mu(\{y\}) \\
&= f(y)
\end{aligned}
$$

Luego $f(y) = 0$ para toda $y \in X$, así que

$$
\begin{aligned}
\lambda(X) &= \int_X f d\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

contradicción porque $\lambda(X) = \infty$ al ser X no contable. $\square$