Tarea 8

Gyivan Erick López Campos

15 de octubre de 2017

Problema 1:

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Queremos probar para toda $x,\, y \in X$ tal que si $\rho(x,\, y) < \varepsilon$ se tiene que $|\rho_E(x) - \rho_E(y)| < \varepsilon$. Por definición de ρ_E, para toda $y \in X$ existe $z_y \in E$ tal que $\rho(y,\, z_y) < \rho_E(y) + \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(x,\, y) + \rho_E(y) + \delta &> \rho(x,\, y) + \rho(y,\, z) \\ &\geq \rho(x,\, z) \\ &\geq \rho_E(x), \end{aligned}$$

luego:

$$\rho(x,\, y) + \delta > \rho_E(x) - \rho_E(y). \tag{1}$$

Análogamente para toda $x \in X$

$$\begin{aligned} \rho_E(y) - \rho_E(x) &< \rho(y,\, x) + \delta \\ &= \rho(x,\, y) + \delta. \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\begin{aligned} \rho(x,\, y) + \delta &> |\rho_E(x) - \rho_E(y)| \\ \Rightarrow \varepsilon &= \delta + \delta \\ &> \rho(x,\, y) + \delta \\ &> |\rho_E(x) - \rho_E(y)|, \end{aligned}$$

por lo que ρ_E es uniformemente continua.

Veamos que si A y C son dos conjuntos cerrados disjuntos en X, para toda $x \in B$, tenemos que $\rho_B(x) = 0$ y $\rho_A(x) > 0$, entonces $f(x) = 1$. Ahora si $x \in A$ se tiene que $\rho_A(x) = 0$ y $\rho_B(x) > 0$, entonces $f(x) = 0$. Por último veamos que para toda $x \in X \setminus (A \cup B)$ que es cerrado, $0 \leq f(x) \leq 1$, por lo que $\chi_A \leq f \leq \chi_{X \setminus (A \cup B)}$, que es el la interpretación análoga de del Lema de Urysohn.

Problema 2:

DEMOSTRACIÓN:

Sea $E_0 = [0, 1]$, y E_n el conjunto de resultante de quitar las terceras partes de los intervalos de E_{n-1}. Claramente el cantor $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ y además si $i > j$ entonces $E_i \subset E_j$, para toda $i, j \in \mathbb{N}$. Luego por el teorema 1.19 del Rudín, tenemos que

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n),$$

pero $\lambda(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, así que $0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lambda(E)$.

Veamos que todo punto $x \in [0, 1]$ se puede expresar como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

donde los a_i's pueden tomar el valor de 0, 1 o 2. Además es claro que $x \in E$ si y solo si existe una representación de

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \tag{3}$$

tal que los $a_i's$ son 0's o 2's (esto es por como está definido el conjunto del Cantor). También podemos ver que todo $x \in [0, 1]$ se puede expresar como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, \tag{4}$$

donde los b_i's pueden tomar el valor de 0 y 1. Definimos $f : E \to [0,\, 1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

donde a_n son los coeficientes de (3), así que $a_i's$ son 0's o 2's. Es fácil ver que f es biyectiva porque cualquier número $x \in [0,\, 1]$ tiene una representación como en (4) así que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{3^n} \in E$ pues $a_n(x)$ es 0 o 1 y existen dos números en el cantor que van a un $x \in [0,1]$ entonces ambos números tienen los mismos coeficientes en (3), por lo que son el mismo.

Luego f es biyectiva así que E tiene la misma cardinalidad que $[0,\, 1]$.

Problema 3:

Demostración:

Sea $F_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$. Como dado $x \in [0,\, 1]$, $f_n(x) \geq 0$ para toda n, podemos entonces encontrar una subsucesión de f_n decreciente la cual llamaremos g_n tal que $g_n \to 0$ puntualmente, esto es porque si no existiera tal sucesión quiere decir que existe $x \in [0,\, 1]$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > m > N$, $f_m(x) > f_n(x)$, entonces

Problema 4:

Demostración:

Definamos $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$ si $x \in [0,\, n]$ y $f_n(x) = 0$ si $x > n$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= e^{\frac{x}{2}} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\
&= e^{\frac{x}{2}} \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)} \\
&= e^{\frac{x}{2}} \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)} \\
&= e^{\frac{x}{2}} e^{\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\right]} \\
&= e^{\frac{x}{2}} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)}{1/n}} \\
&= e^{\frac{x}{2}} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x-n}} \text{ aplicando l'Hopital} \\
&= e^{\frac{x}{2}} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{x}{n}-1}} \\
&= e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{-1}} = e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Además si $x > n$ claramente $e^{-\frac{x}{2}} \geq |f_n(x)| = 0$ para toda n. Sea $g(x) = e^{-x}$ y $h_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Como $g'(x) = -e^{-x} < 0$ y $h_n'(x) = n\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq 0$, entonces g y h son decrecientes para toda $x \in [0,\, n]$ y además $g(0) = 1 = h(0)$ y $g(n) =$

$e^{-n} > 0 = h\left(n\right)$, entonces

$$\begin{aligned} e^{-x} &\geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \\ \Rightarrow e^{-\frac{x}{2}} &\geq \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} e^{\frac{x}{2}}\right| \text{ para toda } x \in \left[0,\, n\right]. \end{aligned}$$

Así que $e^{-\frac{x}{2}} \geq \left|f_n\left(x\right)\right|$ para toda $x \geq 0$.

Además como $e^{-\frac{x}{2}}$ es $\mathcal{L}^1$ en $[0,\infty]$ pues:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-\frac{x}{2}} dx &= \lim_{n\to\infty} -2e^{-\frac{n}{2}} + 2e^0 \\ &= 2, \end{aligned}$$

y $e^{-\frac{x}{2}} \geq \left|f_n\left(x\right)\right|$, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n dx &= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= 2. \end{aligned}$$

Del mismo modo veamos que si definimos ahora $f_n\left(x\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) &= e^{-2x} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= e^{-2x} \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \\ &= e^{-2x} \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-2x} e^{\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right]} \\ &= e^{-2x} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)}{1/n}} \\ &= e^{-2x} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}}} \text{ aplicando l'Hopital} \\ &= e^{-2x} e^{x} = e^{-x} \end{aligned}$$

Además si $x > n$ claramente $e^{-x} \geq \left|f_n\left(x\right)\right| = 0$ para toda n. Sea $g\left(x\right) = e^x$ y $h_n\left(x\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Como $g'\left(x\right) = e^x > 0$ y $h_n'\left(x\right) = n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$, entonces g y h son crecientes para toda $x \in \left[0,\, n\right]$ y además $g\left(0\right) = 1 = h\left(0\right)$ y $g\left(n\right) = e^n > 2^n = h\left(n\right)$, entonces

$$\begin{aligned} e^{x} &\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \\ \Rightarrow e^{-x} &\geq \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}\right| \text{ para toda } x \in \left[0,\, n\right]. \end{aligned}$$

Así que $e^{-x} \geq \left|f_n\left(x\right)\right|$ para toda $x \geq 0$.

Además como e^{-x} es $\mathcal{L}^1$ en $[0,\infty]$ pues:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x} dx &= \lim_{n\to\infty} -e^{-n} + e^{-0} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

y $e^{-\frac{x}{2}} \geq |f_n(x)|$, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n dx &= \int_0^\infty e^{-x} dx \\
&= 1.
\end{aligned}
$$