Tarea 9

Gyivan Erick López Campos

22 de octubre de 2017

Ejercicio 1:
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < \alpha\}$, probemos que E_α es abierto. Sea $x \in E_\alpha$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(x) + \varepsilon < \alpha$. Luego como :

$$\varphi(x) = \inf_{\delta > 0} \{\varphi(x, \delta)\},$$

existe $\delta > 0$ tal que:

$$\varphi(x) + \varepsilon > \varphi(x, \delta).$$

Veamos que $(x - \delta, x + \delta) \subset E$. Sea $t \in (x - \delta, x + \delta)$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $(t - \delta_1, t + \delta_1) \subset (x - \delta, x + \delta)$, luego:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \varphi(t, \delta_1) \\
&= \sup_{r, s \in (t - \delta_1, t + \delta_1)} \{|f(r) - f(s)|\} \\
&\leq \sup_{r, s \in (x - \delta, x + \delta)} \{|f(r) - f(s)|\} \\
&= \varphi(x, \delta) \\
&< \varphi(x) + \varepsilon \\
&< \alpha.
\end{aligned}$$

Por lo que $t \in E_\alpha$ lo que implica que $(x - \delta, x + \delta) \subset E$. Así que E_α es abierto.

Ahora supongamos que f es continua en x. Así que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f((x - \delta, x + \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq \varphi(x, \delta) \\
&= \sup_{r, s \in (x - \delta, x + \delta)} \{|f(r) - f(s)|\} \\
&\leq \sup_{r, s \in (x - \delta, x + \delta)} \{|f(x) - f(s)| + |f(x) - f(t)|\} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Como es para toda $\varepsilon > 0$ se concluye que $\varphi(x) = 0$.

Ahora supongamos que $\varphi(x) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(x) + \varepsilon = \varepsilon > \varphi(x, \delta)$, luego

$$\sup_{r, s \in (x - \delta, x + \delta)} \{|f(r) - f(s)|\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(s)| < \varepsilon, \forall s \in (x-\delta,\, x+\delta)$$

Por lo tanto f es continua en x.

Ejercicio 2:

Definamos $K_0 = [0,\, 1]$ e inductivamente construimos K_n al quitar el intervalo abierto de tamaño 2^{-2n} de en medio de todos los intervalos de K_{n-1}. Demostremos que esto siempre se puede hacer para todos los intervalos de K_{n-1}.

Por la simetría de la construcción, todos los intervalos de K_n van a medir lo mismo, así que digamos que miden c_n. Demostremos por inducción que $c_{n-1} > 3 \cdot 2^{-2n}$. Claramente si $c_0 = 1 > 3 \cdot 2^{-2} = \frac{3}{4}$. Supongamos que $c_{n-1} > 3 \cdot 2^{-2n}$, demostremos que $c_n > 3 \cdot 2^{-2(n+1)}$.

Como

$$\begin{aligned} 3 &> \frac{5}{2} \\ \Rightarrow 3\left(2^{-2n}\right) &> 5\left(2^{-2n-1}\right) \\ \Rightarrow c_{n-1} &> 5\left(2^{-2n-1}\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(2^{-2n}\right) \\ &= \left(2^{-2n}\right)\left[\frac{3}{2}+1\right] \\ &= 3\left(2^{-2n-1}\right) + \left(2^{-2n}\right) \\ \Rightarrow c_{n-1} - \left(2^{-2n}\right) &> 3\left(2^{-2n-1}\right) \\ \Rightarrow \frac{c_{n-1} - \left(2^{-2n}\right)}{2} &> 3\left(2^{-2(n+1)}\right), \end{aligned}$$

pero $c_n = \frac{c_{n-1} - \left(2^{-2n}\right)}{2}$ por construcción, así que $c_n > 3 \cdot 2^{-2(n+1)}$.

Ya que hemos demostrado que nuestra construcción tiene sentido, definamos $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Por construcción, K_n tiene 2^n intervalos, así que a K_{n-1} se le tuvo que restar $2^{n-1} \cdot \left(2^{-2n}\right)$ para obtener K_n y así consecutivamente, por lo que:

$$\begin{aligned} \mu(K_n) &= \mu([0,\, 1]) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i}} 2^{i-1} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 - \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ aplicando serie geométrica.} \end{aligned}$$

Luego $\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \frac{1}{2}$. Además como cada K_n es cerrado porque su complemento son los abierto que retiramos unión $(-\infty,\, 0)$ y $(1,\, \infty)$, entonces K es cerrado al ser intersección de cerrados en $\mathbb{R}$, y como K también es acotado, se tiene que K es compacto.

Por último, K es totalmente disconexo porque si existiera un intervalo $(a,\, b)$ en K, entonces debería existir una n suficientemente grande tal que $2^{-2n} < b - a$ para la cual tenemos que partir el intervalo $(a,\, b)$, lo que genera una contradicción.

Ejercicio 3:

La construcción es análoga al del ejercicio anterior. Definamos $K_0 = [0,\, 1]$ e inductivamente construimos K_n al quitar el intervalo abierto de tamaño $\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n$ de en medio de todos los intervalos de K_{n-1}. Demostremos que esto siempre se puede hacer para todos los intervalos de K_{n-1}.

Por la simetría de la construcción, todos los intervalos de K_n van a medir lo mismo, así que digamos que miden c_n. Demostremos por inducción que $c_{n-1} > 3\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n$. Claramente como:

$$\begin{aligned} 1 &> \varepsilon \\ \Rightarrow 1 &> 3\varepsilon - 2\varepsilon \\ \Rightarrow 1 + 2\varepsilon &> 3\varepsilon \\ \Rightarrow 1 &> \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} \\ \Rightarrow c_0 &> 3\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \end{aligned} \tag{1}$$

Supongamos que $c_{n-1} > 3\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n$, demostremos que $c_n > 3\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{n+1}$.

Como:

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} \text{ por (1)} \\ \Rightarrow 3\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{n+1} &< \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n \\ &= \frac{2\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n}{2} \\ &= \frac{3\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n}{2} \\ &< \frac{c_{n-1} - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n}{2} \end{aligned}$$

pero $c_n = \frac{c_{n-1} - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n}{2}$ por construcción, así que $c_n > 3 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{n+1}$.

Ya que hemos demostrado que nuestra construcción tiene sentido, definamos $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Por construcción, K_n tiene 2^n intervalos, así que a K_{n-1} se le tuvo que restar $2^{n-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n$ para obtener K_n y así consecutivamente, por lo que:

$$\begin{aligned} \mu\left(K_n\right) &= \mu\left([0,\, 1]\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^i 2^{i-1} \\ &= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{i-1} 2^{i-1} \\ &= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{i} 2^{i} \\ &= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)}\right), \text{ aplicando serie geométrica.} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mu(K) &= \lim_{n\to\infty}\mu(K_n)\\
&= 1-\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\frac{1+2\varepsilon-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}}\right)\\
&= 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomemos $Q=[0,\,1]\setminus K$. Claramente $\mu(Q)=\mu([0,1])-\mu(K)=\varepsilon$, además por el ejercicio anterior, vimos que K es totalmente disconexo porque si existiera un intervalo $(a,\,b)$ en K, entonces debería existir una n suficientemente grande tal que $\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^n<b-a$ para la cual tenemos que partir el intervalo $(a,\,b)$. Ahora si nos tomamos $x\in[0,1]$ y un intervalo $(a,\,b)\subset[0,1]$ que contenga a x entonces debe existir $y\in Q$ tal que $y\in(a,\,b)$, de lo contrario $(a,\,b)\subset K$ contradicción con que K es disconexo. Por lo tanto Q es denso en $[0,1]$.

Ejercicio 5:

- Como queremos que $\log(1+e^t)<c+t$, esto es si y solo si $1+e^t<e^{c+t}$ porque a exponencial es una función creciente, al ser también una función siempre positiva, podemos dividir entre e^t sin cambiar la desigualdad, entonces

$$\begin{aligned}
1+e^t &< e^{c+t}\\
&\Updownarrow\\
\frac{1}{e^t}+1 &< e^c
\end{aligned}$$

  Como log también es una función creciente, entonces $\frac{1}{e^t}+1<e^c\Leftrightarrow\log(e^{-t}+1)<c$. Ahora para $0<t<\infty$, el máximo valor que puede tomar $\log(e^{-t}+1)$ es cuando $t\to0$, gracias a que log es continua y creciente, así que basta con que $c>\lim_{t\to0}\log(e^{-t}+1)=\log 2$.

- Sea $X\subset[0,\,1]$ tal que si $x\in X,\ f(x)\geq0$. Entonces por el inciso anterior viendo a $t=nf(x)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_X\log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx &\leq \int_X(\log 2+nf(x))\,dx\\
&= \int_X\log 2dx+\int_X nf(x)\,dx\\
&\leq \int_0^1\log 2dx+\int_X nf(x)\,dx\\
&= \log 2+\int_X nf(x)\,dx\\
\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X\log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log 2+\int_X nf(x)\,dx\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X nf(x)\,dx\\
&= \int_X f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Además sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para toda $n > N$ se tiene que $\log\left(1+e^{nf(x)}\right)+\varepsilon > \log\, 2 + nf\left(x\right)$ por que en el inciso anterior vimos que log 2 es la constante mas pequeña que acotaba al lado izquierdo. Luego para toda $n > N$se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_X \left[\log\left(1+e^{nf(x)}\right)+\varepsilon\right]dx &\geq \int_X \left(\log\, 2 + nf\left(x\right)\right)dx \\
&= \int_X \log\, 2dx + \int_X nf\left(x\right)dx \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \left[\log\left(1+e^{nf(x)}\right)+\varepsilon\right]dx &\geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\int_X \log\, 2dx + \int_X nf\left(x\right)dx\right] \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \varepsilon dx &\geq \lim_{n\to\infty}\frac{\int_X \log\, 2dx}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X nf\left(x\right)dx \\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx &\geq \int_X f\left(x\right)dx,
\end{aligned}$$

ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_X \log\, 2dx}{n} = 0$ porque $\int_X \log\, 2dx$ es una constante y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \varepsilon dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon}{n}\int_X dx = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx = \int_X f\left(x\right)dx$$

Además, si definimos $g_n\left(x\right) := \frac{1+e^{nf(x)}}{n}$ para $x \in [0,\, 1]\setminus X$, entonces $h_n\left(x\right) := \frac{\log\circ g_n(x)}{n}$ converge puntualmente a $h\left(x\right) := \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+e^{nf(x)}\right)}{n} = \frac{\log\left(1+e^{\lim_{n\to\infty} nf(x)}\right)}{\lim_{n\to\infty} n} = 0$ para toda $x \in [0,\, 1]\setminus X$. Luego por ele ejercicio de la tarea pasada el límite puede entrar a la integral y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{[0,\,1]\setminus X} \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\,1]\setminus X} h_n\left(x\right)dx \\
&= \int_{[0,\,1]\setminus X} \lim_{n\to\infty} h_n\left(x\right)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Concluyendo tenemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx$ existe y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_X \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{[0,\,1]\setminus X} \log\left(1+e^{nf(x)}\right)dx \\
&= \int_X f\left(x\right)dx.
\end{aligned}$$