ANÁLISIS COMPLEJO - 2017. TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves, 15 de febrero
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea $q(z)$ un polinomio de grado $m \geq 1$. Muestra que cualquier polinomio $p(z)$ se puede expresar en la forma

$$p(z) = h(z)q(z) + r(z),$$

donde $h(z)$ y $r(z)$ son polinomios y el grado del residuo $r(z)$ es estrictamente menor que m.

Problema 2: Encuentra los polinomios $h(z)$ y $r(z)$ del ejercicio anterior si $p(z) = z^n$ y $q(z) = z^2 - 1$.

Problema 3: Fija $n \geq 1$. Muestra que las $n-$ésimas raíces de la unidad $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ satisfacen

(a) $(z - \omega_0)(z - \omega_1) \cdots (z - \omega_{n-1}) = z^n - 1$
(b) $\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{n-1} = 0$ si $n \geq 2$.
(c) $\omega_0 \omega_1 \cdots \omega_{n-1} = (-1)^{n-1}$.
(d)
$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq n-1 \\ n, & k = n. \end{cases}$$

Problema 4: Muestraque la rotación de la esfera de 180 grados alrededor del eje X corresponde bajo la proyección estereográfica a la inversión $z \to 1/z$ de $\mathbb{C}$.

Problema 5: Definimos la distancia cordal $d(z, w)$ entre dos puntos $z, w \in \mathbb{C}^*$ como la longitud del segmento de línea uniendo los puntos P y Q en la esfera bajo la proyección estereográfica de z y w, respectivamente.

(a) Muestra que la distancia cordal es una métrica
(b) Muestra que la distancia cordal está dada por
$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, z, w \in \mathbb{C}.$$
(c) Que es $d(z, \infty)$? Nota: La expresión para $d(z, w)$ muestra que longitudes de arco infinitesimales corresponden bajo la métrica cordal está dada por
$$d\sigma(z) = \frac{2ds}{1 + |z|^2},$$
donde $d = |dz|$ es la métrica Euclidiana usual de longitud de arco. La longitud de arco infinitesimal $d\sigma(z)$ determina otra métrica, la métrica esférica $\sigma(z, w)$, en el plano complejo extendido $\mathbb{C}^*$.