ANÁLISIS COMPLEJO - 2018. TAREA 10

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 21 de mayo

Antes de las 11:10 AM 100%

Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 (Pag 198): Evalúa los siguientes residuos:
(a) Res $\left[\frac{1}{z^2+4}, i\right]$, (b) Res $\left[\frac{\sin(z)}{z^2}, 0\right]$, (c) Res $\left[\frac{z}{\log(z)}, 1\right]$ y (d) Res $\left[\frac{z^n+1}{z^n-1}, e^{2\pi ki/n}\right]$.

Problema 2 (Pag 198): Evalúa las siguientes integrales usando el teorema del residuo

$$\text{(a)} \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz, \text{(b)} \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz \text{ y (c)} \oint_{|z-1/2|=3/2} \frac{\tan z}{z} dz.$$

Problema 3 (Pag 202): Muestra usando la teoría del residuo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 4 (Pag 208): Muestra usando la teoría del residuo que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a \log x}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi \sin(\pi a) - a\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}, \quad -1 < a < 1.$$

Problema 5 (Pag 211): Muestra usando la teoría del residuo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+1)} dx = \pi(1 - e^{-a}), \quad a > 0.$$

Sugerencia: Reemplaza $\sin(az)$ por e^{iaz}, e integra sobre la frontera de un semi-disco centrado en $z = 0$.

Problema 6 (Pag 228): Muestra que z^4+2z^2-z+1 tiene exactamente una raíz en cada cuadrante.

Problema 7 (Pag 228): Muestra que si $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$, entonces la ecuación $e^z = z + \lambda$ tiene exactamente una solución en el semi-plano izquierdo.

Problema 8 (Pag 229): Sea $f(z)$ una función continuamente diferenciable en un dominio D. Supongamos que para cualesquier constantes complejas a y b, el incremento en el argumento de $f(z) + az + b$ alrededor de un círculo pequeño en D en el cual $f(z) + az + b \neq 0$ es no-negativo. Muestra que $f(z)$ es analítica.

Problema 9 (Pag 232): Sea $\{f_k(z)\}$ una sucesión de funciones analíticas en D que convergen normalmente a $f(z)$, y supongamos que $f(z)$ tiene un cero de orden N en $z_o \in D$. Usa el teorema de Rouché para mostrar que existe $\rho > 0$ tal que para k grande, $f_k(z)$ tiene exactamente N ceros contando multiplicidades en el disco $\{|z - z_o| < \rho\}$.

Problema 10 (Pag 235): Sea $f(z)$ una función meromorfa en el plano complejo, y supongamos que existe un entero m tal que $f^{-1}(w)$ tiene a lo más m puntos para todo $w \in \mathbb{C}$. Supongamos que $f(z)$ es una función racional.