ANÁLISIS COMPLEJO - 2018. TAREA 3

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves, 8 de marzo
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 (pag 41): Sea $h(t)$ una función continua complejo valuada en el intervalo unitario $[0,1]$, y considera
$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{z-t} dt.$$
En donde está $H(z)$ definida? En donde es $H(z)$ continua? Justifica tu respuesta. *Sugerencia:* Usa el hecho de que si $|f(t) - g(t)| < \epsilon$ para $0 \leq t \leq 1$, entonces $\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt < \epsilon$.

Problema 2 (pag 53): Sea a un número complejo, $a \neq 0$, y sea $f(z)$ una rama analítica de z^a en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Muestra que $f'(z) = af(z)/z$. (Entonces $f'(z) = az^{a-1}$, donde escogemos la rama de z^{a-1} que corresponde a la rama original de z^a dividido por z).

Problema 3 (pag 53): Recuerda que $\cos^{-1}(z) = -i \log[z \pm \sqrt{z^2 - 1}]$. Supongamos que $g(z)$ es una rama analítica de $\cos^{-1}(z)$ definida en un dominio D. Encuentra $g'(z)$. Tienen diferentes ramas de $\cos^{-1}(z)$ las mismas derivadas?

Problema 4 (pag 53): Sea $f(z)$ una función analítica acoatada, definida en un dominio acotado $D \subset \mathbb{C}$. Supongamos que $f(z)$ es una función uno a uno. Muestra que el área de $f(D)$ está dada por
$$\text{Area}\,(f(D)) = \int\int_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

Problema 5 (pag 57): Demuestra que las siguiente funciones son armónicas y encuentra su conjugada armónica

(a) $x^2 - y^2$
(b) $\sinh x \sin y$
(c) $\tan^{-1}(y/x), x > 0$
(d) $xy + 3x^2 y - y^3$
(e) $e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$
(f) $x/(x^2 + y^2)$

Problema 6 (pag 57): Muestra que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Problema 7 (pag 58): Muestra, usando la ecuación de Laplace en coordenadas polares que $u(re^{i\theta}) = \theta \log r$ es armónica. Usa la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para encontrar la conjugada armónica v de u. Cual es la función analítica $u + iv$?