ANÁLISIS COMPLEJO - 2018. TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves, 19 de abril
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 (Pag 109): Evalúa las siguientes integrales, para la trayectoria γ que va de $-\pi i$ a πi en el semiplano derecho, y también para la trayectoria γ que va de $-\pi i$ a πi en el semiplano izquierdo.

(a) $\int_\gamma z^4 dz$
(b) $\int_\gamma e^z dz$
(c) $\int_\gamma \cos z dz$
(d) $\int_\gamma \sinh z dz$

Problema 2 (Pag 111): Definimos los polinomios de Hermite $H_n(x)$ y las funciones ortogonales de Hermite $\phi_n(x)$ para $n \geq 0$ por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right), \quad \phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x).$$

(a) Muestra que $H_n(x) = 2^n x^n + \dots$ es un polinomio de grado n que es par si n es par e impar si n es impar.

(b) Integrando la función

$$e^{\frac{(z-it)^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right)$$

alrededor de un rectángulo con vértices $\pm R, it \pm R$ y mandando $R \to \infty$, muestra que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{-itx} dx = (-i)^n \phi_n(t), \quad -\infty < x < \infty.$$

Sugerencia: Usa la identidad del ejercicio 1 de la página 111 del libro, además de usar y mostrar la identidad

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-(x+it)^2} = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-(x+it)^2}.$$

(c) Muestra que

$$\phi_n''(x) - x^2 \phi_n + (2n+1)\phi_n = 0.$$

(d) Usando $\int \phi_n'' \phi_m = \int \phi_n \phi_m'' dx$ y la parte (c), muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, n \neq m.$$

Nota: Este ejercicio sobre el teorema de Cauchy muestra que los ϕ_n formen un sistema ortogonal de eigenfunciones de la transformada de Fourier normalizada.

Problema 3 (Pag 116): Evalúa las siguientes integrales, usando la fórmula integral de Cauchy.

(a)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz, n \geq 0$$

(b)
$$\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2} dz$$

(c)
$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Problema 4 (Pag 117): Sea D un dominio acotado con frontera suave ∂D, y sea $z_o \in D$. Usando la fórmula integral de Cauchy, muestra que existe una constante C tal que

$$|f(z_o)| \leq C \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\},$$

para cualquier función analítica en $D \cup \partial D$. Aplicando esta estimación para $f(z)^n$, tomando raíces n-ésimas, y tomando $n \to \infty$, muestra que la estimación se satisface para $C = 1$. *Nota:* Esto representa una alternativa para la prueba del principio del máximo para funciones analíticas.