ANÁLISIS COMPLEJO - 2018. TAREA 9

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 14 de mayo
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 (Pag 137): Muestra que $f_k(x) = z^k/k$ converge uniformemente para $|z| < 1$. Muestra que $f'_k(z)$ no converge uniformemente para $|z| < 1$. Qué se puede decir a cerca de la convergencia uniforme de $f'_k(z)$?
Problema 2 (Pag 143): Muestra que la función definida por $f(z) = \sum z^{n!}$ es analítica en el disco abierto $\{|z| < 1\}$. Muestra que $|f(r\lambda)| \to +\infty$ cuando $r \to 1$ siempre que λ no sea una raíz de la unidad. *Nota:* Entonces $f(z)$ no se extiende analíticamente a cualquier otro conjunto abierto más grande que el disco abierto unitario.
Problema 3 (Pag 148): Encuentra la expansión en series de potencia de la rama principal de $\tan^{-1}(z)$ de la tangente inversa en $z = 0$. Cual es el radio de convergencia de la serie? *Sugerencia:* Encuentralo integrando sus derivadas término por término.
Problema 4 (Pag 158): Supongamos que $f(z)$ es analítica en un dominio D y $z_o \in D$. Muestra que si $f^{(m)}(z_o) = 0$ para todo $m \geq 1$, entonces $f(z)$ es contante en D.
Problema 5 (Pag 158): Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones analíticas en un dominio D tal que $f_n(D) \subset D$, y supongamos que $f_n(z)$ converge normalmente a $f(z)$ en D. Muestra que ya sea $f(D) \subset D$, o $f(D)$ consiste de un solo unto en ∂D.
Problema 6 (Pag 163): Supongamos que $f(z) = \sum a_n z^n$, donde la serie tiene radio de convergencia $R < \infty$. Supongamos que hay un ángulo α tal que $f(z)$ no tiene una continuación analítica en la trayectoria $\gamma(t) = te^{i\alpha}, 0 \leq t \leq R$. Determina el radio de convergencia de la expansión en series de potencias de $f(z)$ al rededor de $te^{i\alpha}$
Problema 7 (Pag 170): Supongamos que $f(z)$ es analítica en $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Muestra que hay una constante c tal que $f(z) - c/z$ tiene una primitiva en D. Da una fórmula para c en términos de una integral de $f(z)$.
Problema 8 (Pag 177): Muestra que si z_o es una singularidad aislada de $f(z)$, y si $(z - z_o)^N f(z)$ es acotada cerca de z_o, entonces z_o es una singularidad removible o un polo de orden a lo más N.
Problema 9 (Pag 177): Muestra que si $f(z)$ es una singularidad aislada de $f(z)$ que no es removible, entonces z_o es una singularidad esencial de $e^{f(z)}$.