Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Posgrado en Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de Mexico
Examen 1

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Septiembre 12, 2018

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 7

TU NOMBRE:

Prob 1 /25	
Prob 2 25	
Prob 3 /25	
Prob 4 /25	
TOTAL /100	

Mucho éxito en su examen!

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - Examen 1

Problema 1: Considera el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= 2ty(t) \\ \\ y(0) &= y_o. \end{cases}$$

Esto es, $f(t, y) = 2ty$. Considera además la iteración de Picard $y_{n+1}(t) = y_o + \int_o^t f(s, y_n(s))ds$.

- Calcula las primeras tres iteraciones de picard y_o, y_1, y_2.

- Por inducción, muestra que la enésima iterada está dada por

$$y_n(t) = y_o \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k!}$$

y analiza la convergencia de la serie.

Problema 2: Desigualdad generalizada de Grönwall.

- Sean $u(t), v(t), \beta(t)$ funciones continuas no negativas definidas en un intervalo $[t_o, t_o+a]$, $a > 0$. Supongamos que

  $$v(t) \leq \beta(t) + \int_{t_o}^{t} u(s)v(s)ds, t \in [t_o, t_o + a].$$

  Demuestra que

  $$v(t) \leq \beta(t) + \int_{t_o}^{t} u(s)\beta(s)e^{\int_s^t u(r)dr}ds, \text{ para } t \in [t_o, t_o + a].$$

  Sugerencia: Para $\Phi(t) = \int_{t_o}^{t} u(s)v(s)ds$, muestra que $\Phi' \leq u\beta + u\Phi$ y usa factores integrantes.

- Si además $\beta(s)$ es monótonamente creciente, entonces

  $$v(t) \leq \beta(t) \exp\left(\int_{t_o}^{t} u(s)ds\right).$$

Problema 3: Considera el problema $ty' - y = t^2 \cos t$.

- Encuentra la solución general y bosqueja varias soluciones. *Sugerencia:* Usa factores integrantes.

- Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} ty' - y &= t^2 \cos t \\ y(0) &= -3. \end{cases}$$

  Demuestra que no tiene solución y explica por qué esto no contradice los teoremas de existencia y unicidad.

Problema 4: Considera el teorema de Picard-Lindelof y la notación vista en clase. Si en el teorema, v está cerca de y_o, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_o) &= v \end{cases}$$

tiene una solución única $y = y(t, v)$ en algún intervalo $t_o, t_o + \beta$ independiente de v. Muestra que $y(t, v)$ es uniformemente Lipschitz continuo con respecto a (t, v) para $t_o \leq t \leq t_o + \beta, v \approx y_o$.