ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - 2018-1. TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 17 de septiembre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: *Generalización del criterio de Nagumo (ver Teorema 6.2 de Hartman y su demostración)* Demostrar que el teorema 6.2 del Hartman (visto en clase) es válido si la hipótesis sobre $f(t, y)$ se debilita a

$$[f(t, y_2) - f(t, y_1)] \cdot (y_2 - y_1) \leq \frac{||y_2 - y_1||^2}{t - t_o}$$

para $t_o < t < t_o + a$.

Problema 2: Sea $X(t)$ una matrix solución $n \times n$ del problema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}.$$

Demuestra que el determinante $z(t) = \det(X(t))$ satisface la ecuación

$$\dot{z}(t) = [\mathrm{tr}A(t)]z(t),$$

donde $\mathrm{tr}A(t)$ es la traza de $A(t)$.

Problema 3: Escribe

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \text{ donde } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

como un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

(a) Elimina y para obtener una ecuación de segundo orden en x.
(b) Toma la ecuación de segundo orden y re-escríbela como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Este sistema no es el sistema con el que empezamos, pero muestra que un cambio de variables convierte un sistema en otro que puede resultar más manejable.

Problema 4: Para el sistema $x' = 4x - y, y' = 2x + y$,

(a) Usando notación de matrices, verifica que $x = e^{3t}, y = e^{3t}$ y $x = e^{2t}, y = 2e^{2t}$ son soluciones.
(b) Verifica que esas soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones, i.e., son linealmente independientes.