ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - 2018-1. TAREA 6

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 1 de octubre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea $A(t)$ una matriz tal que $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ es uniformemente asintoticamente estable para $t \geq \beta$, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos además que existe una función continua $c(t)$ tal que

$$\int_t^{t+1} c(s)ds \leq \gamma, t \geq \beta,$$

para alguna constante $\gamma = \gamma(\beta)$ y $|f(t, \boldsymbol{x})| \leq c(t)|\boldsymbol{x}|$. Demuestra que existe una contante $r > 0$ tal que la solución $x = 0$ de

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + f(t, \boldsymbol{x}(t))$$

es uniformemente asintóticamente estable si $\gamma < r$.

Problema 2: Usando iteradas de Picard, demuestra que para cada matriz A $n \times n$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \ldots$$

Problema 3: Usando el teorema visto en clase sobre eigen-espacios generalizados, encuentra la solución general real de la ecuación $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ con

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(e)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$