ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - 2018-1. TAREA 9

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles 24 de octubre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: El retrato fase de un sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ se obtiene al bosquejar las órbitas del sistema, mostrando el comportamiento cualitativo de las soluciones. Sea $\epsilon > 0$, x_1, x_2 escalares, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ y considera el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_2 + \epsilon x_1(1-r^2) \\ \dot{x_2} &= x_1 + \epsilon x_2(1-r^2). \end{aligned}$$

El espacio fase de este sistema es $\mathbb{R}^2$. Si $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$, verifica que el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 \\ \dot{r} &= \epsilon r(1-r^2). \end{aligned}$$

Encuentra el retrato fase del sistema.

Problema 2: Analiza el retrato fase de las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2(x_2^2 - x_1^2) \\ \dot{x_2} &= x_1(x_2^2 - x_1^2). \end{aligned}$$

Problema 3: Muestra un ejemplo de un sistema bi-dimensional que tenga una órbita cuyo conjunto límite ω sea no vacío y disconexo.

Problema 4: La forma más conocida de la ecuación de Hill es la ecuación de Mathieu

$$y'' + (a - 2q\cos(2t))y = 0.$$

Para $a = 1, q = 0$, la base de soluciones es $\cos(t), \sin(t)$. Para $q \approx 0$, podemos encontrar soluciones de la forma

$$x(t) = \cos(t) + qC_1(t) + q^2C_2(t) + \dots,$$

con

$$a = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \dots.$$

Sustituyendo las expresiones de arriba en la ecuación, igualando las potencias y removiendo términos no periódicos, muestra que podemos encontrar la primer solución periódica de la ecuación de Mathieu dada por

$$x(t) = \cos(t) - \frac{1}{8}q\cos(3t) + \frac{1}{64}q^2\left[-\cos(3t) + \frac{1}{3}\cos(5t)\right] - \frac{1}{512}q^3\left[\frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{9}\cos(5t) + \frac{1}{18}\cos(7t)\right] + \dots$$

con

$$a = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \dots$$