Algoritmos y Estructuras de Datos
Tarea 7

Profesor: Sergio Rajsbaum, Ayudante: Jorge Figueroa

fecha de hoy: 22 de noviembre 2007, fecha de entrega: 4 de diciembre 2007

— explica en detalle y con claridad <u>todas</u> tus respuestas —

— explica el funcionamiento de tus algoritmos informalmente, luego escribe el código, y luego demuestra correctez y complejidad.—

Se permite trabajar en equipos de dos personas. Pero cada uno debe entregar la tarea resuelta por separado, e indicar el nombre de su compañero de equipo.

Tema: flujo en redes, apareamientos y conexidad

1. Sea $G = (V, E)$ una gráfica bipartita con partición de V en conjuntos X y Y. Sea $M \subseteq E$ un apareamiento de G, y k el número de vértices de X sin aparear. Demuestra en detalle que los siguientes enunciados son equivalentes.
   (a) M es un apareamiento máximo
   (b) G no tiene caminos alternantes con respecto a M
   (c) Existe un subconjunto S de X tal que $|N(S)| = |S| - k$.

2. Un *certificado* de k-conexidad de una gráfica $G = (V, E)$ es una subgráfica $G' = (V, E')$ que preserva la conexidad por aristas de G entre cualquier pareja de vértices. Es decir, $\lambda(x, y; G') \geq \min(k, \lambda(x, y; G))$. Donde $\lambda(x, y; G)$ denota el número de caminos disjuntos por aristas en G entre x y y.
   (a) Demuestra que cualquier certificado de k-conexidad debe tener al menos $k|V|/2$ aristas, si G es k-conexa (k-*conexa* significa que para cualquier pareja de vértices, $\lambda(x, y; G) \geq k$).
   (b) Demuestra que G siempre tiene un certificado de k-conexidad con menos de $k|V|$ aristas, diseñando un algoritmo eficiente para encontrarlo.

3. Dada una gráfica dirigida $G = (V, E)$ con nodos $s, t \in V$, y capacidades inferiores $\ell(e)$ en cada arco $e \in E$, consideramos flujos f que satisfacen la ley de conservación de flujo en todos los nodos menos s, t, y en cada arco e el requerimiento de que $f(e) \geq \ell(e)$ (no hay cota superior del flujo en el arco).
   (a) Presenta un algoritmo eficiente para encontrar un flujo mínimo en G de s a t.
   (b) Prueba un análogo del Teorema de Flujo Máximo/Corte Mínimo y de Integridad para este problema.