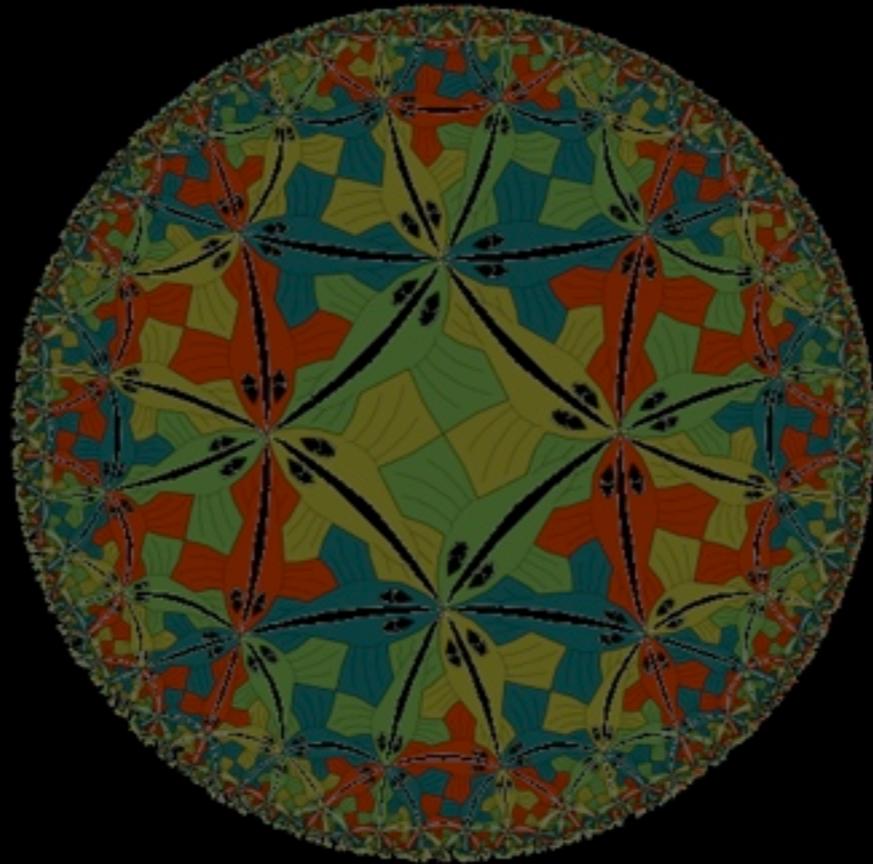


# Les Algorithmes et la Récursivité



Sergio Rajsbaum  
Instituto de Matemáticas  
UNAM

# Introduction



Computadora Pegasus 1956

# Introduction

- L'informatique est née au début du XXème siècle à peine



Computadora Pegasus 1956

# Introduction

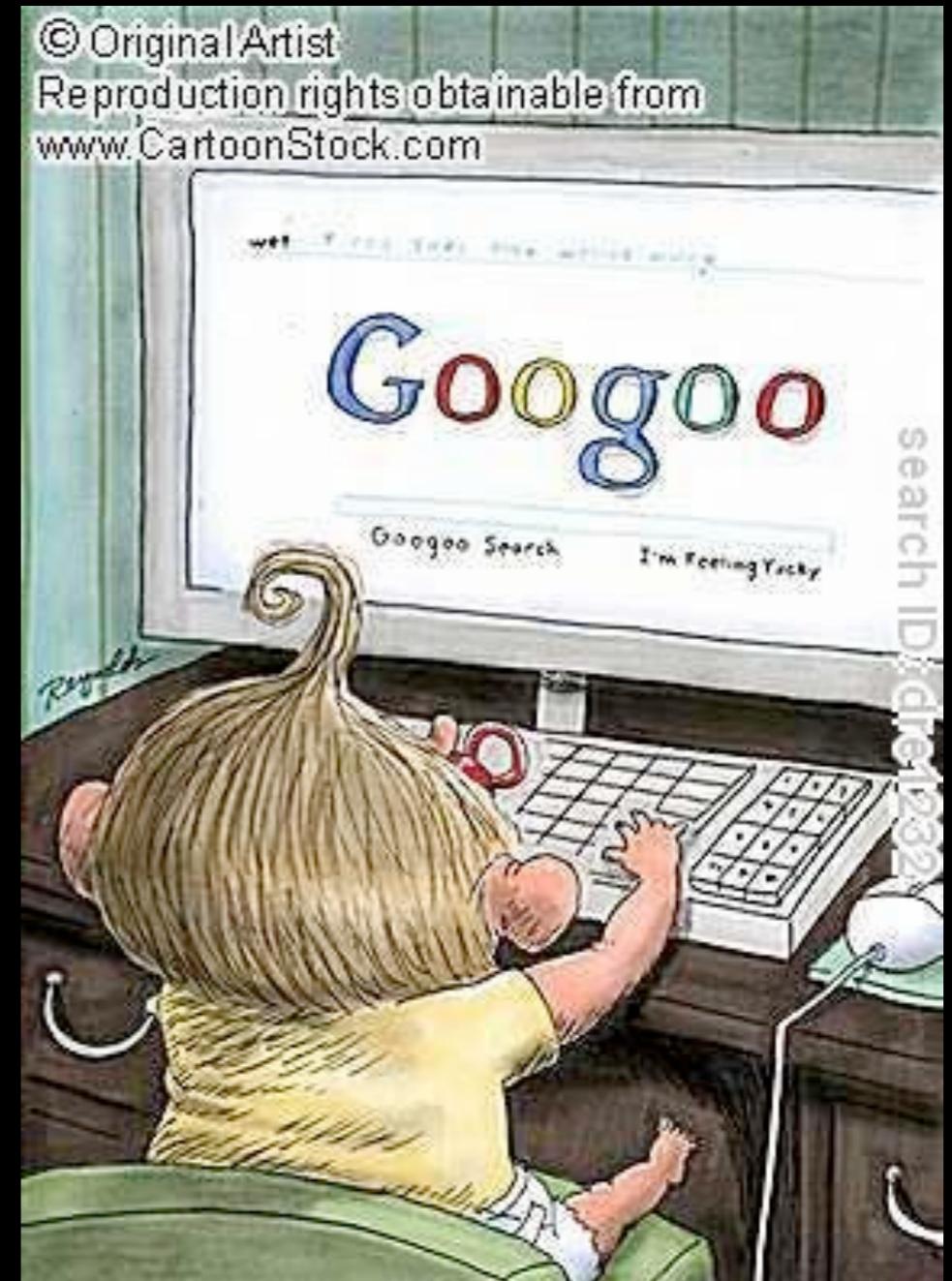
- L'informatique est née au début du XXème siècle à peine
- l'informatique est cependant déjà présente dans presque tous les aspects de notre vie



Computadora Pegasus 1956

# Introduction

- L'informatique est née au début du XXème siècle à peine
- l'informatique est cependant déjà présente dans presque tous les aspects de notre vie



Mais ...

# Mais ...

- L'objet d'étude de l'informatique ne se réduit pas aux ordinateurs !

# Mais ...

- L'objet d'étude de l'informatique ne se réduit pas aux ordinateurs !
- De la même façon que l'objet d'étude des astronomes ne se réduit pas aux télescopes, ni celui des docteurs aux bistouris

# Imagine



# Imagine

- L'informatique concerne la création de modèles appropriés pour raisonner sur un problème, et



# Imagine

- L'informatique concerne la création de modèles appropriés pour raisonner sur un problème, et
- la conception de méthodes pour les résoudre



# Algorithme

*C'est une spécification précise et sans ambiguïtés d'une séquence de pas qu'il est possible d'exécuter mécaniquement pour résoudre un problème*

# Algorithme

*C'est une spécification précise et sans ambiguïtés d'une séquence de pas qu'il est possible d'exécuter mécaniquement pour résoudre un problème*

# Algorithme

*C'est une spécification précise et sans ambiguïtés d'une séquence de pas qu'il est possible d'exécuter mécaniquement pour résoudre un problème*

# Algorithme

*C'est une spécification précise et sans ambiguïtés d'une séquence de pas qu'il est possible d'exécuter mécaniquement pour résoudre un problème*

Un algorithme c'est...

# Un algorithme c'est...

- Une recette de cuisine,  
qu'il est possible  
d'exécuter avec  
précision, et

# Un algorithme c'est...

- Une recette de cuisine, qu'il est possible d'exécuter avec précision, et
- pour tout nombre de gâteaux (quelque soit la taille du problème)



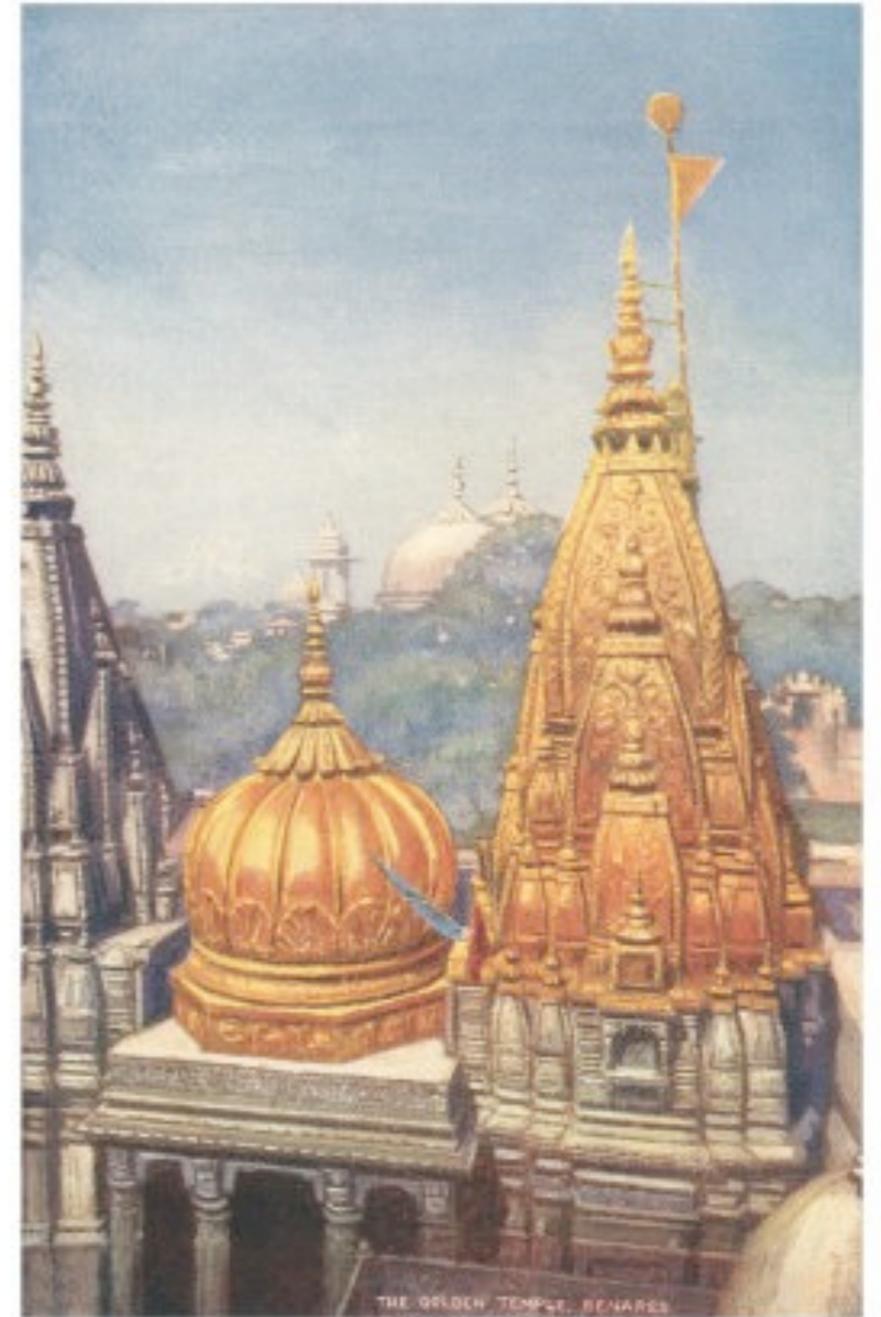
# Tours de Hanoï

# Tours de Hanoï

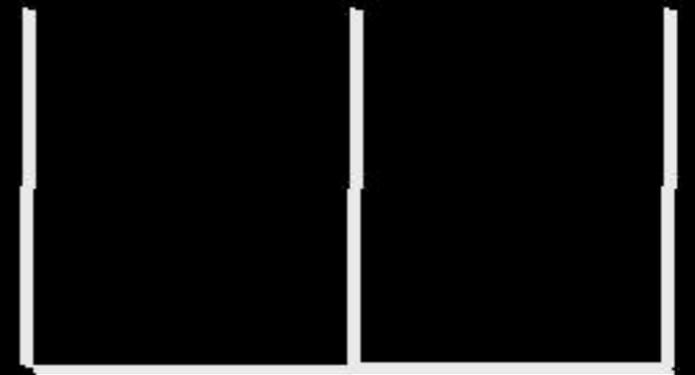
*La légende*

*Dans le grand temple de  
Bénarès, au-dessous du dôme  
qui marque le centre du  
monde, plantées dans une dalle  
d'airain ...*

*Dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, plantées dans une dalle d'airain ...*



*... il y a trois aiguilles de  
diamant, hautes d'une coudée  
et grosses comme le corps  
d'une abeille*



*Sur une de ces aiguilles, Dieu enfile au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet.*



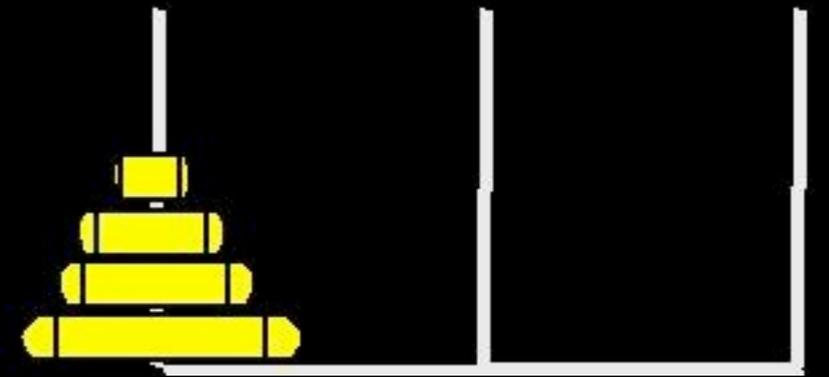
*C'est la tour sacrée du Brahmâ*



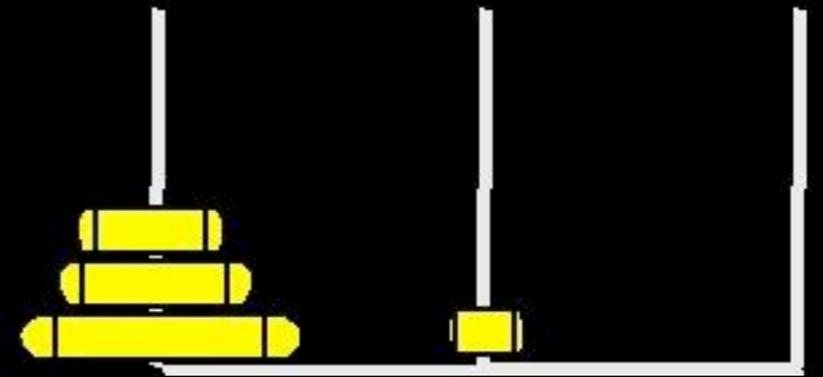
*Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles spécifiques imposées par Brahma:*



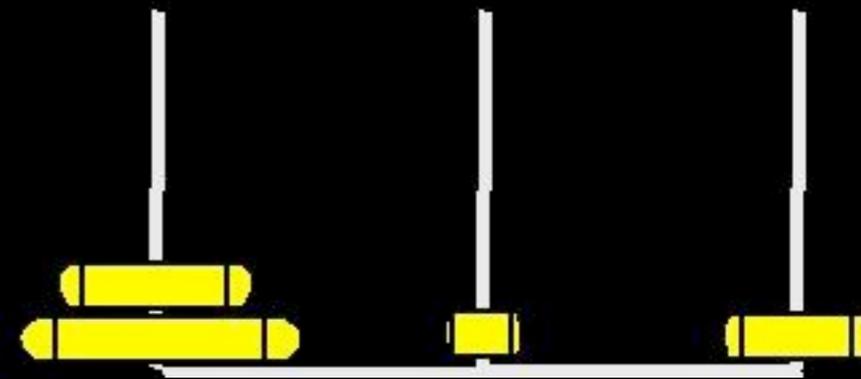
- *on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois*



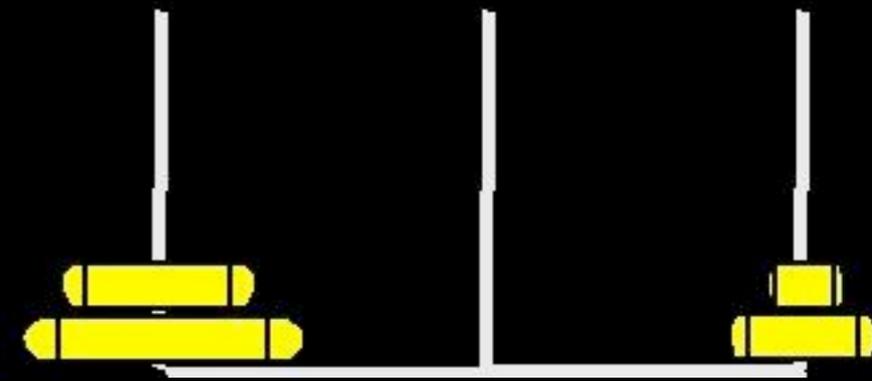
- *on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois*



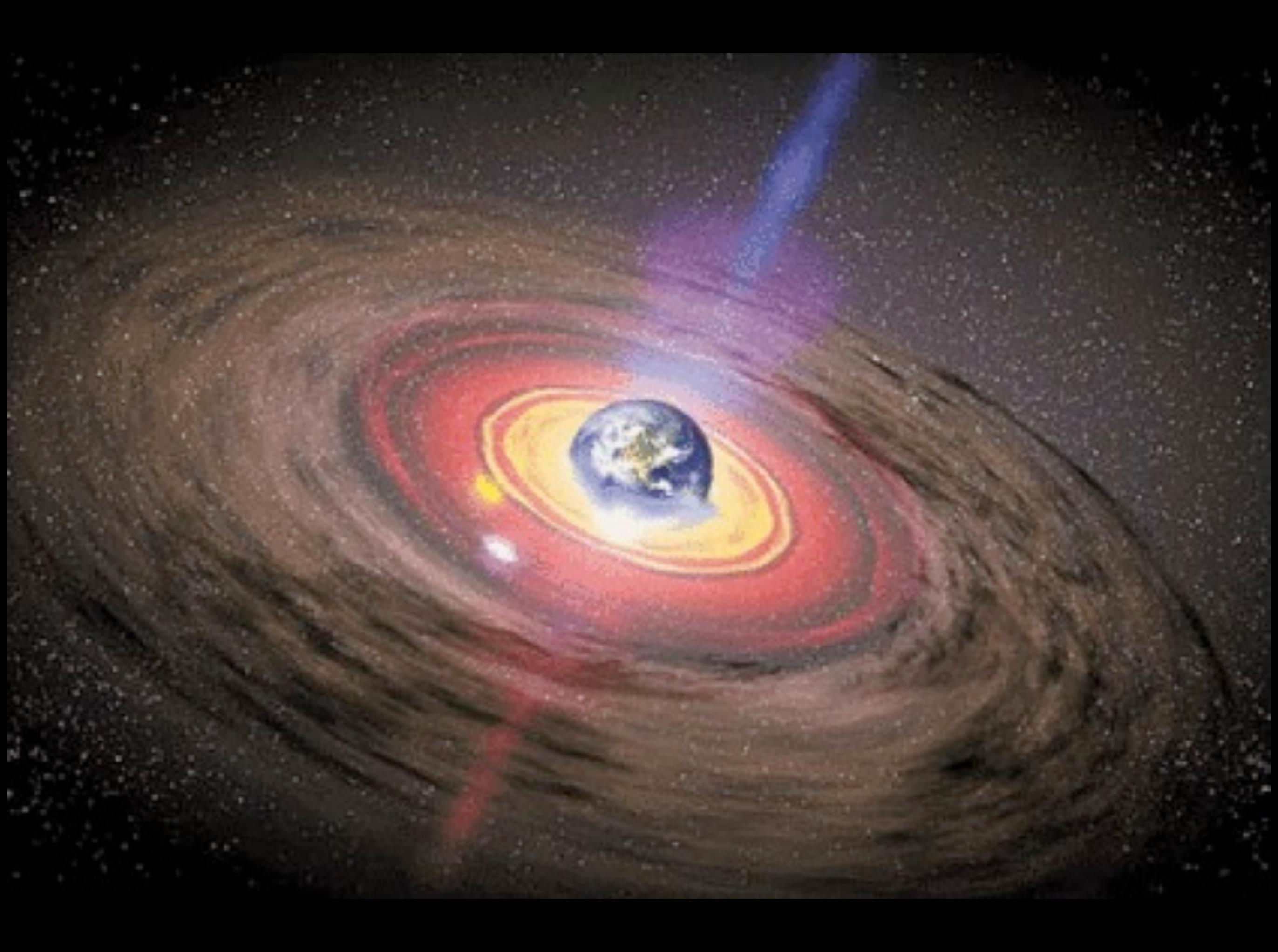
- *on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide*



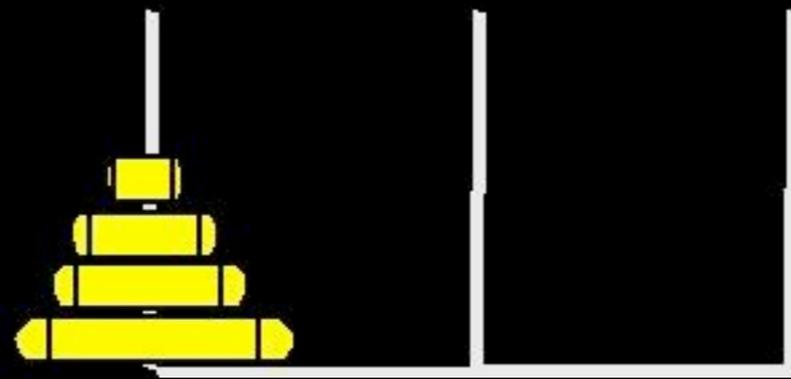
- *on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide*



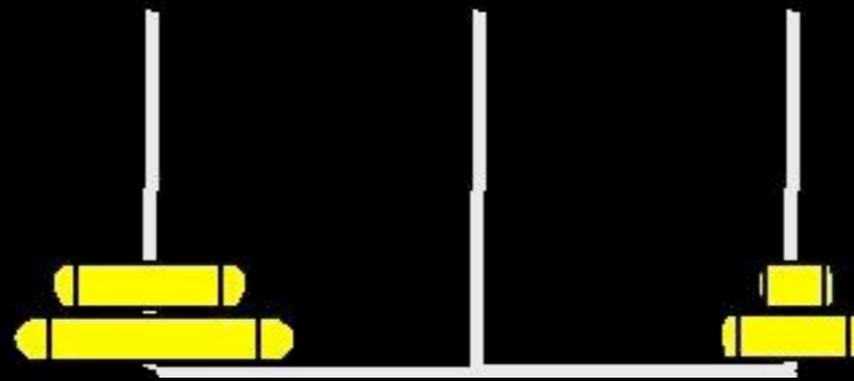
*Quand les 64 disques seront transférés de  
l'aiguille initiale à un autre aiguille, tout sera fini,  
la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la  
fin des mondes*

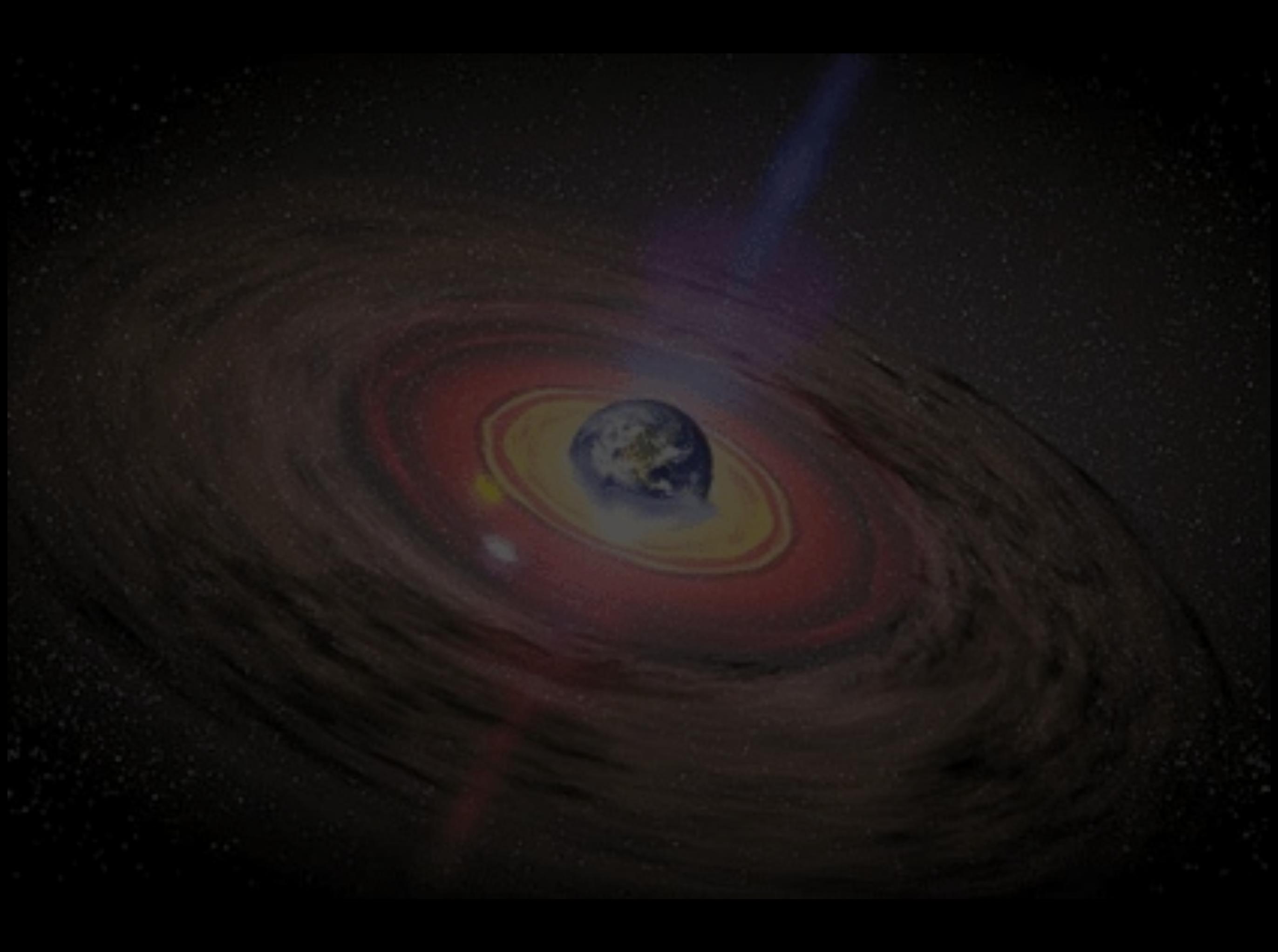


En admettant qu'il faille un seconde pour déplacer un disque, ce qui fait 86 400 déplacements par jour



En admettant qu'il faille un seconde pour déplacer un disque, ce qui fait 86 400 déplacements par jour





A stylized illustration of Earth surrounded by concentric rings of red, orange, and yellow, set against a dark, starry background. The Earth is depicted as a small blue and white sphere in the center, surrounded by a thick, glowing ring of yellow and orange, which is further enclosed by a larger, fainter ring of red. The background is a dark, textured space filled with numerous small white stars, suggesting a cosmic or astronomical theme.

Dans combien de temps le monde disparaîtra-t-il ?

Le nombre de mouvements de disques est au moins :

18.446.744.073.709.551.615



La fin du jeu aurait lieu au bout d'environ 213 000  
milliards de jours

La fin du jeu aurait lieu au bout d'environ 213 000  
milliards de jours

ce qui équivaut approximativement à 584,5 milliards  
d'années,

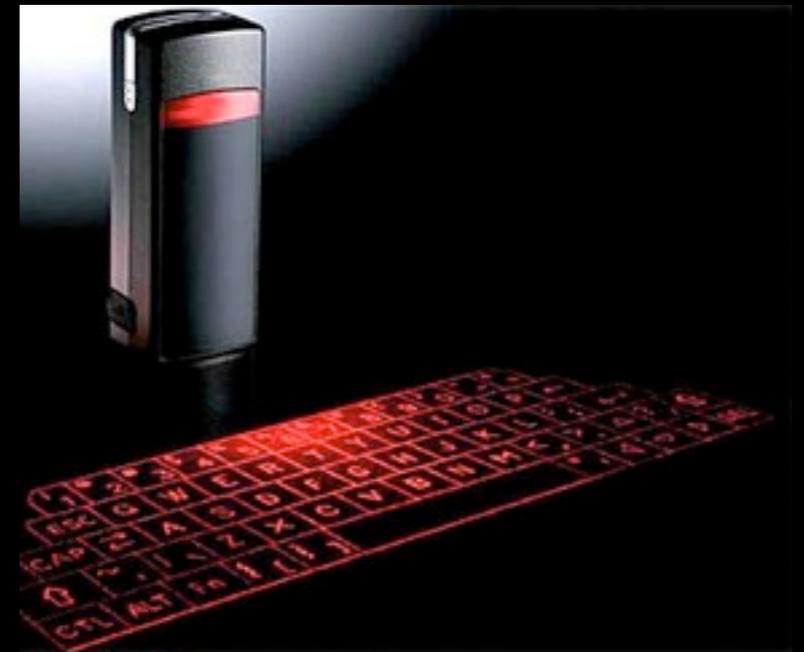


La fin du jeu aurait lieu au bout d'environ 213 000  
milliards de jours

ce qui équivaut approximativement à 584,5 milliards  
d'années,

**qui est 43 fois l'âge estimé de l'univers !**

Que se passerait-il si on utilisait un ordinateur très rapide ?



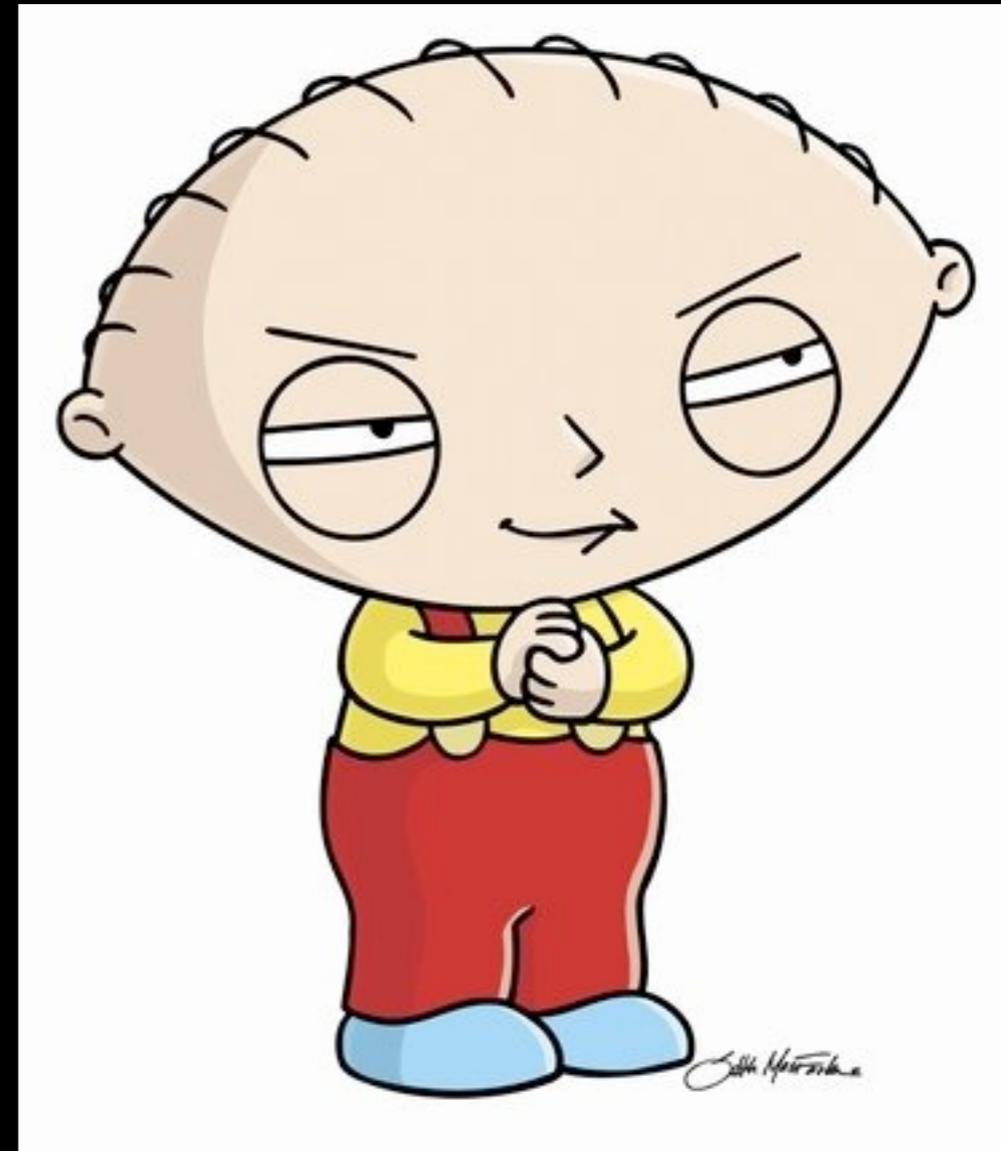
Que se passerait-il si on utilisait un ordinateur très rapide ?

On pourrait déplacer un million de disques par seconde



Que se passerait-il si on utilisait un ordinateur très rapide ?

On pourrait déplacer un million de disques par seconde



Et alors, quand le monde disparaîtrait-il ?

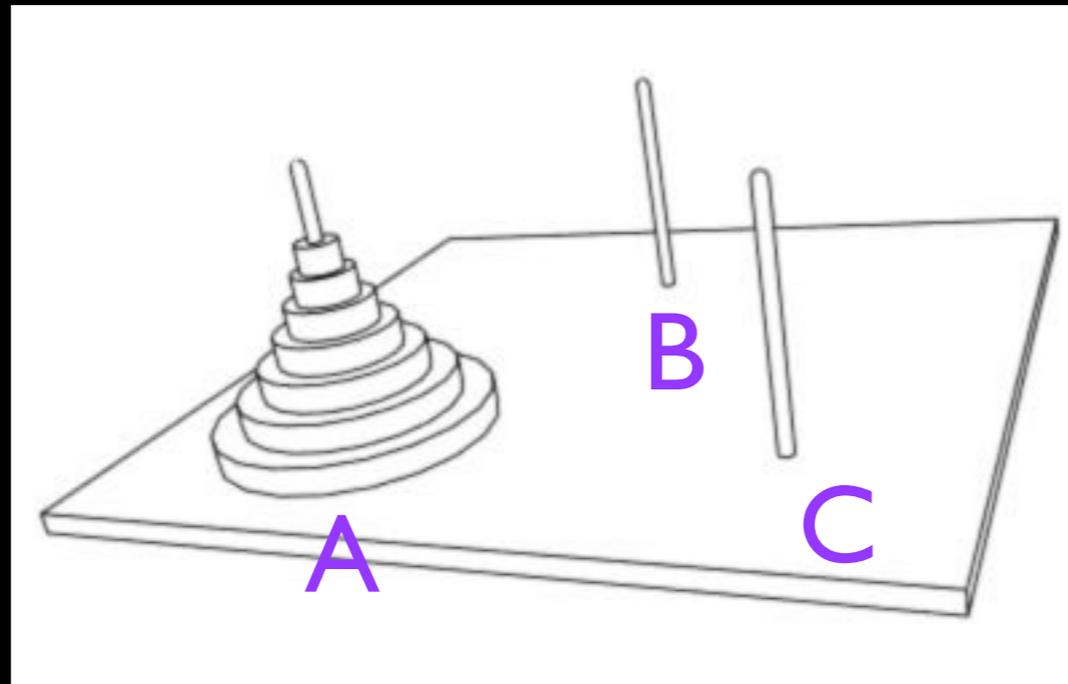
**Dans plus de 500.000 ans !**



L'algorithme

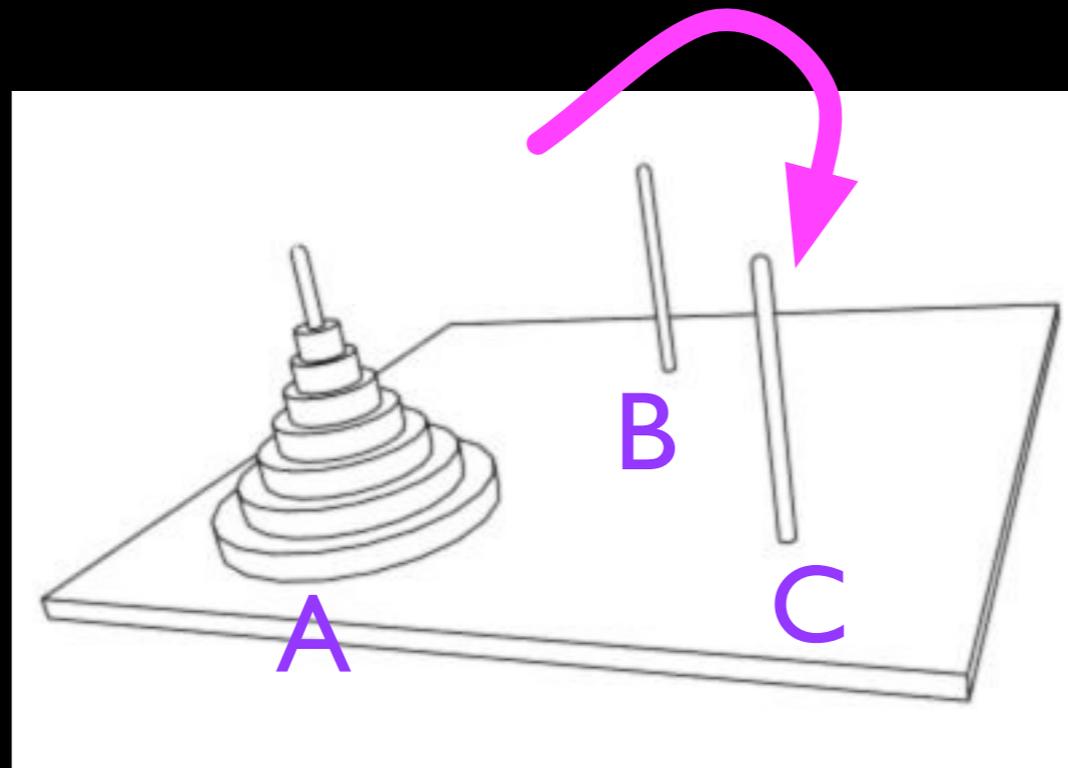
# Les Règles des Brahmanes

- Imaginez que les aiguilles sont en cercle



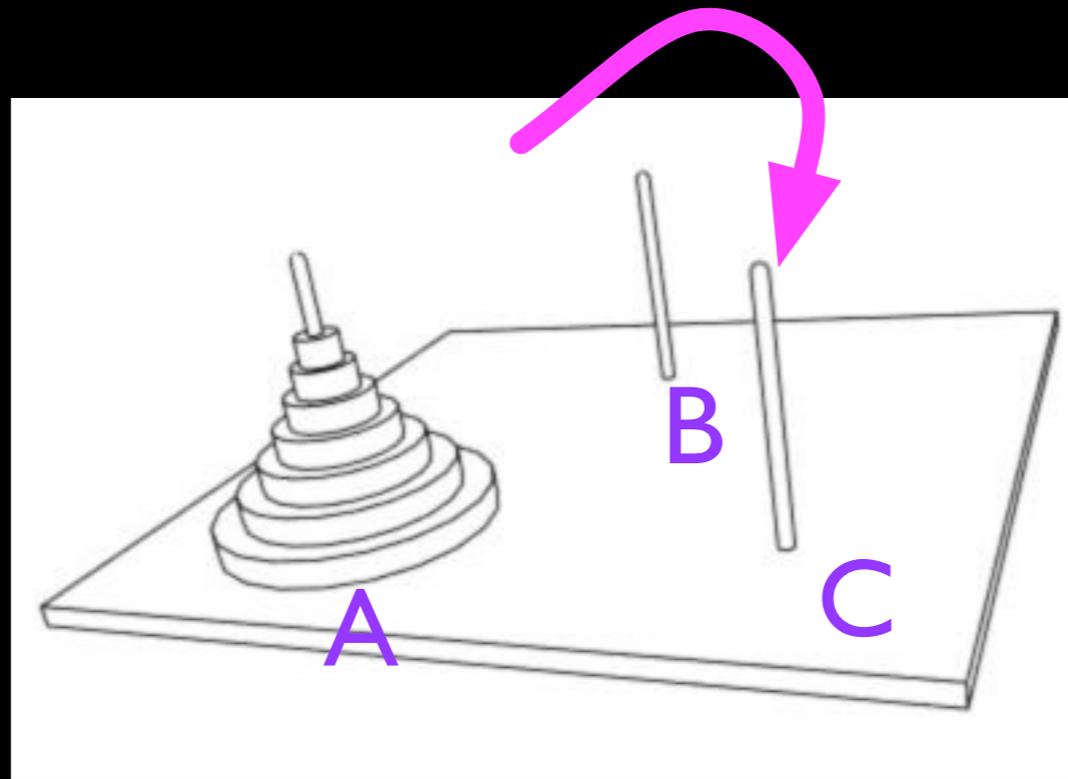
# Règles des Brahmanes

- Déplacer les disques dans le sens des aiguilles d'une montre

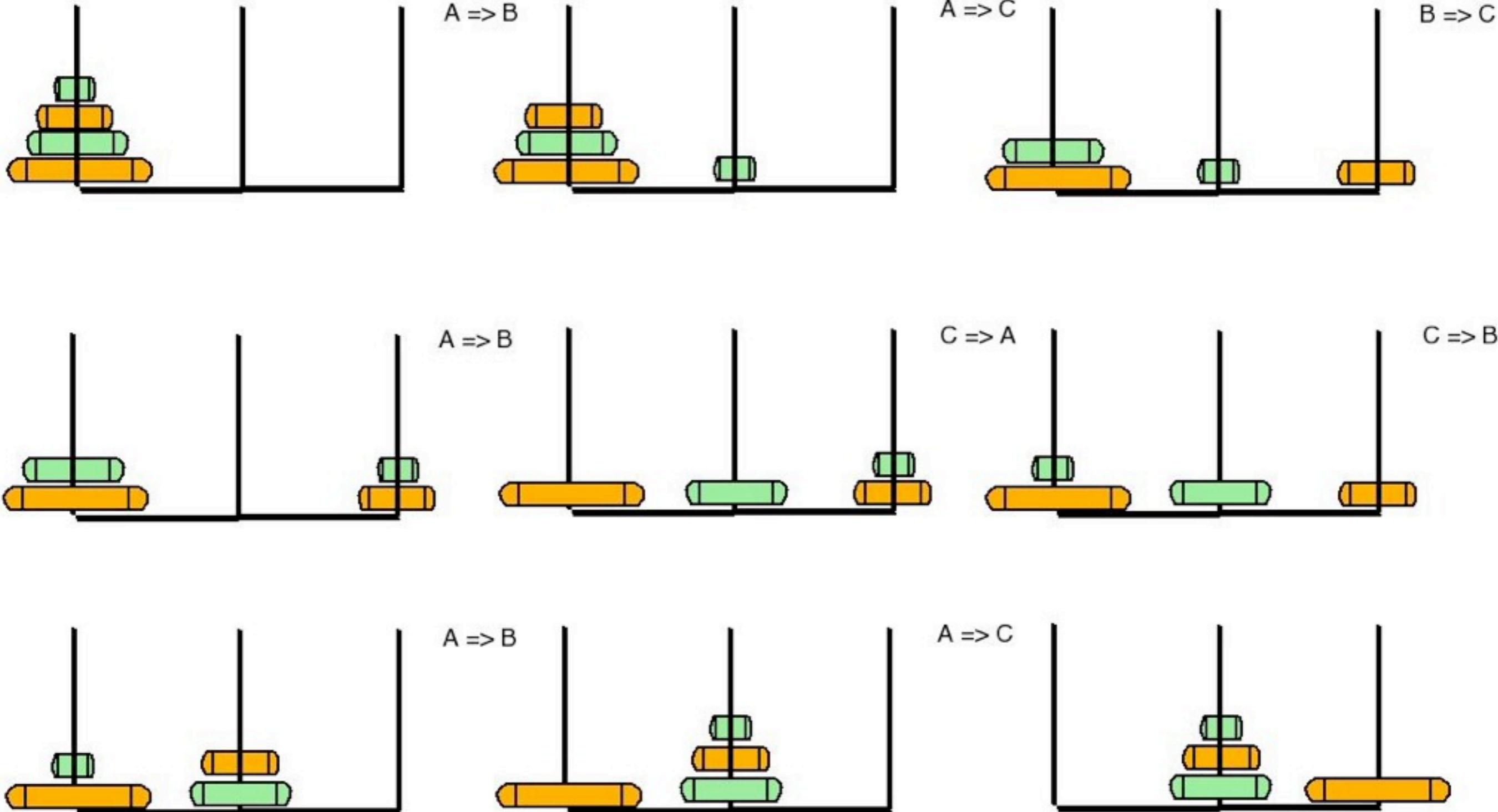


# Répétez deux Règles

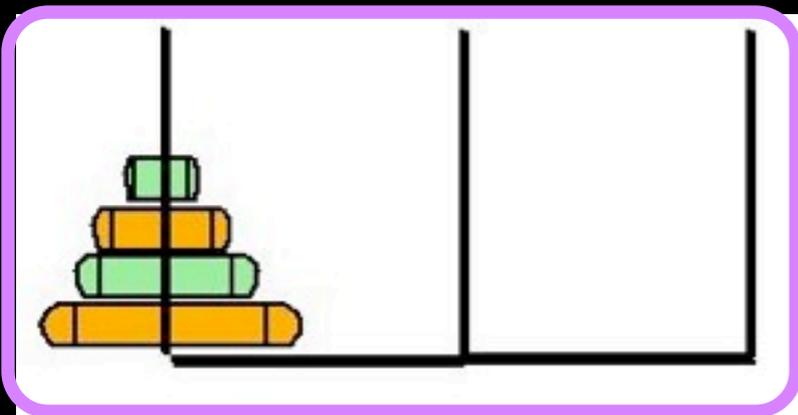
1. Déplacer le plus petit disque vers l'aiguille suivante
2. Déplacer un disque différent du plus petit



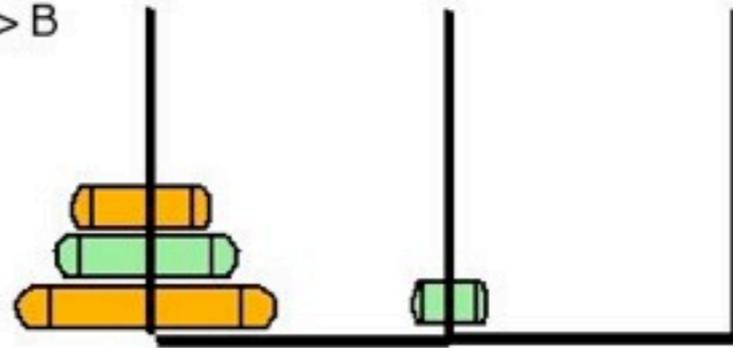
# Exemple



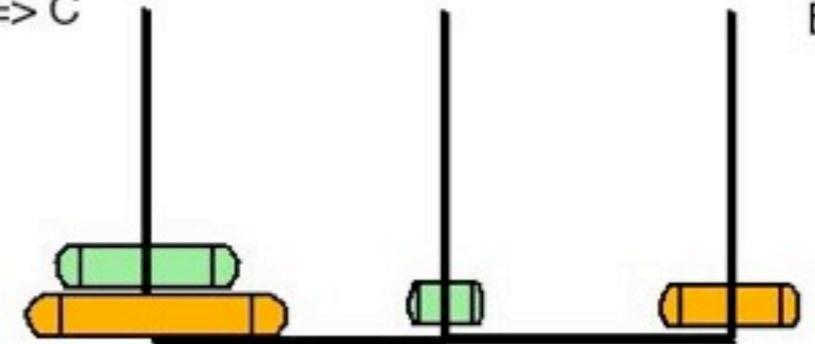
# Exemple



$A \Rightarrow B$

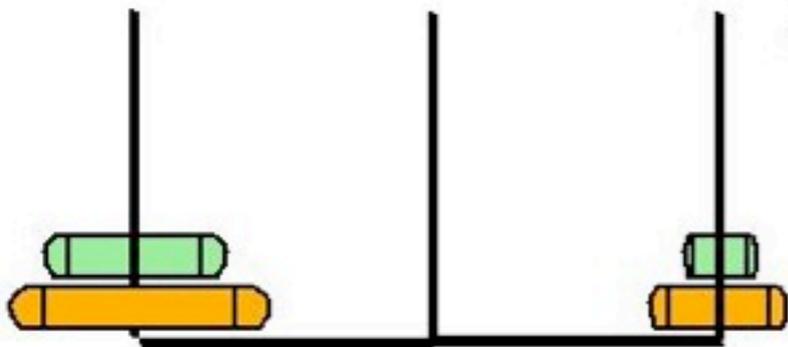


$A \Rightarrow C$

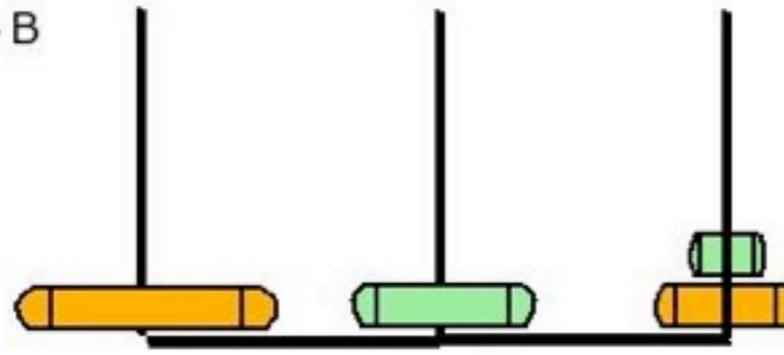


$B \Rightarrow C$

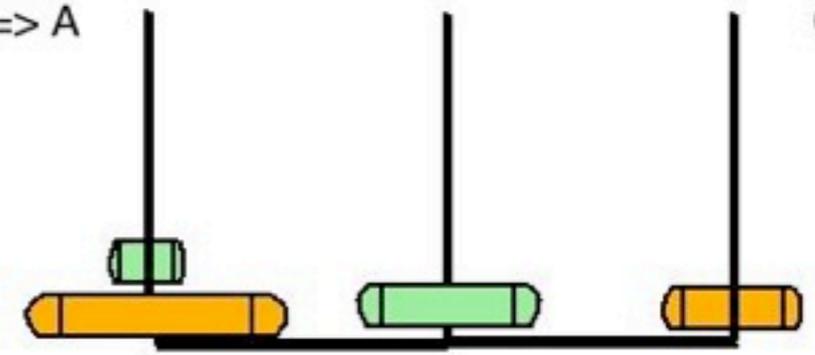
$A \Rightarrow B$



$A \Rightarrow B$

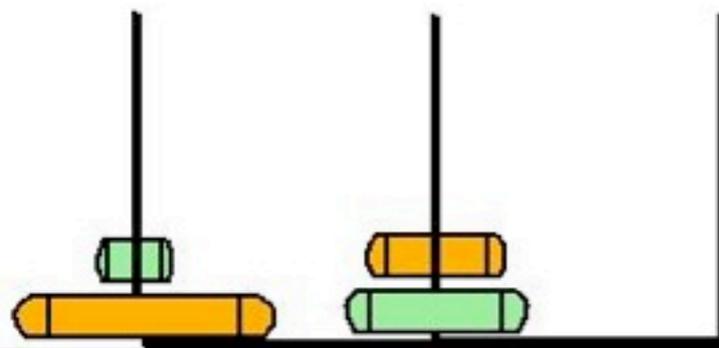


$C \Rightarrow A$

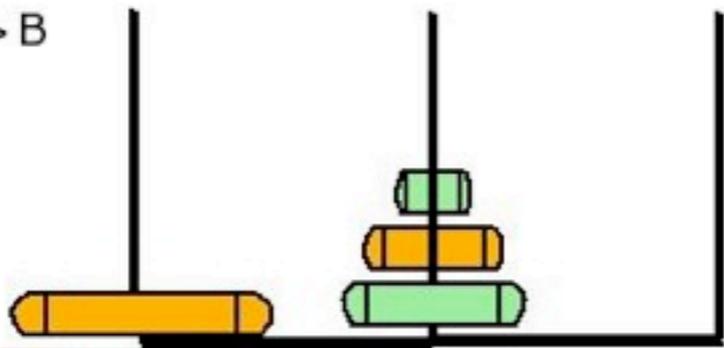


$C \Rightarrow B$

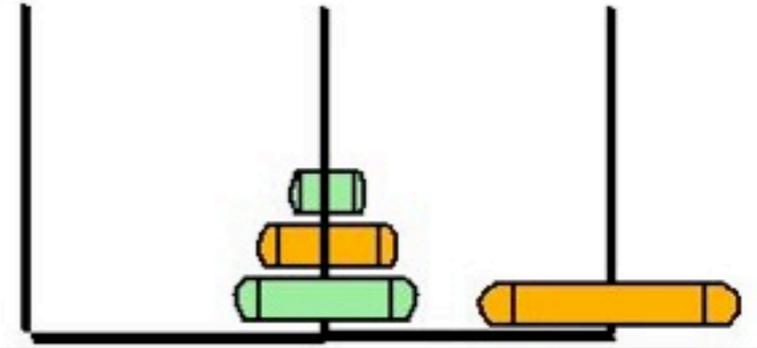
$A \Rightarrow B$



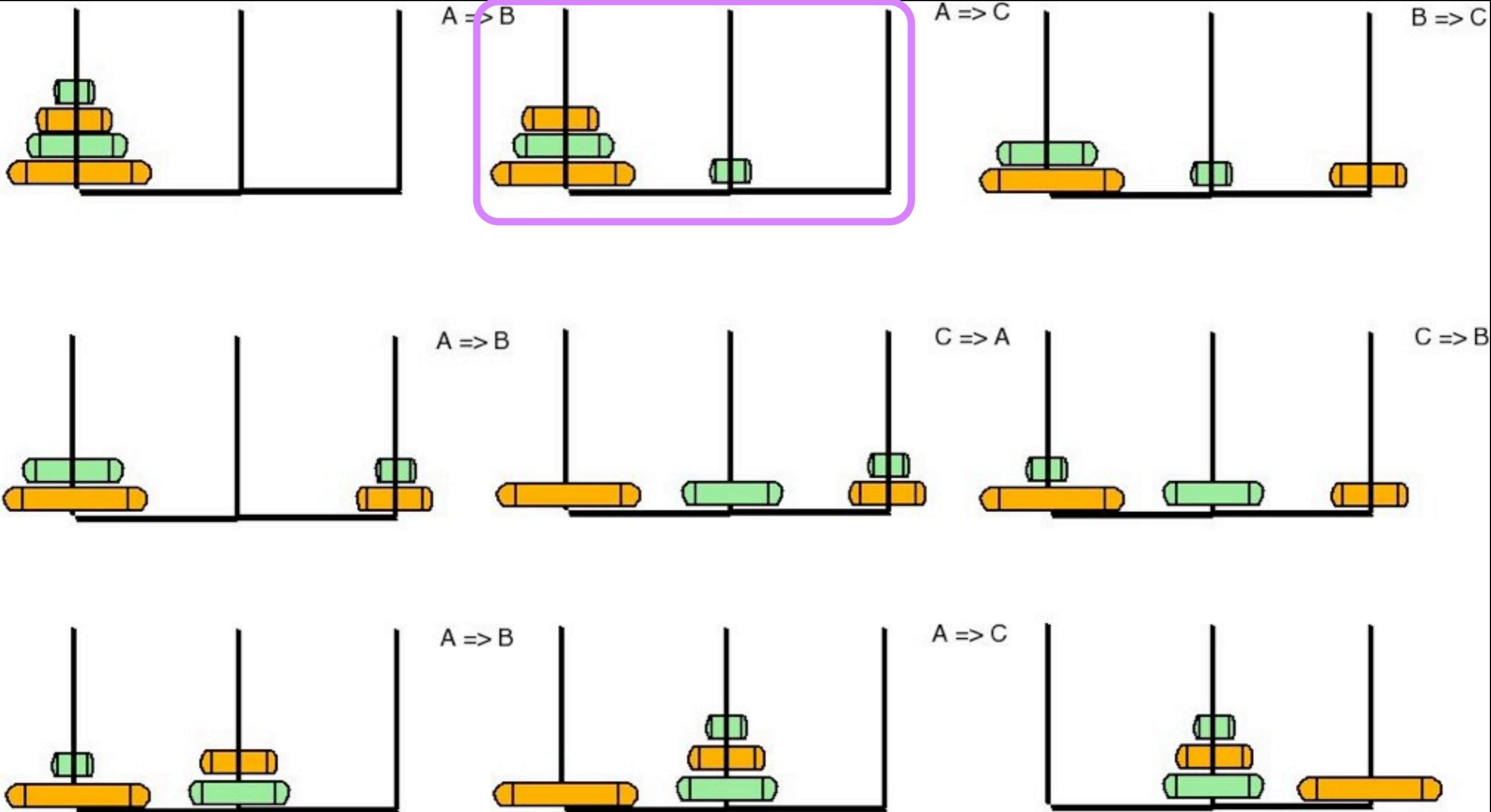
$A \Rightarrow B$



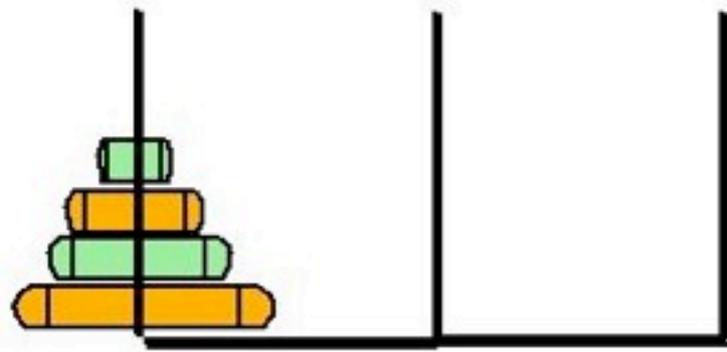
$A \Rightarrow C$



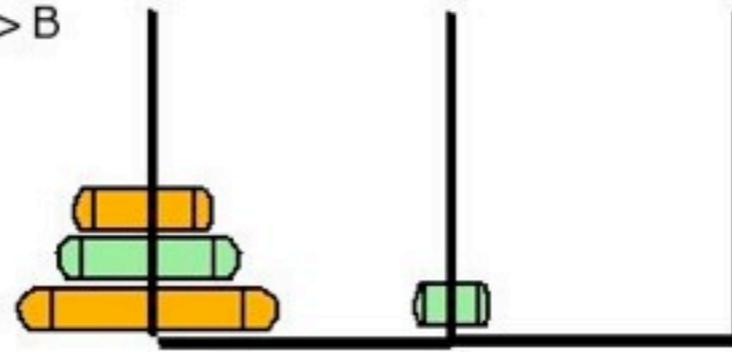
# Exemple



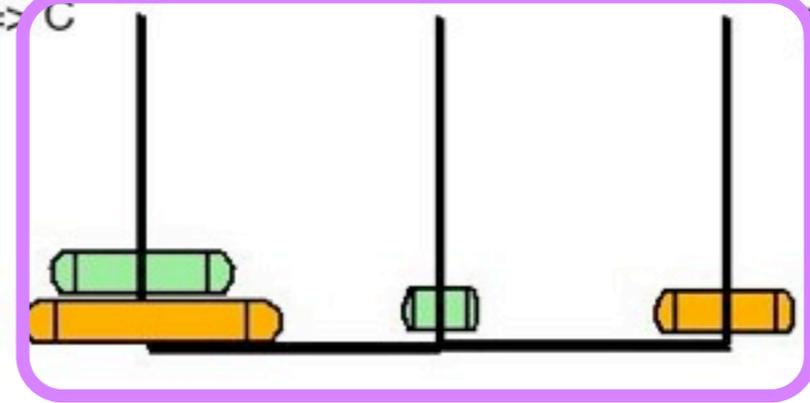
# Exemple



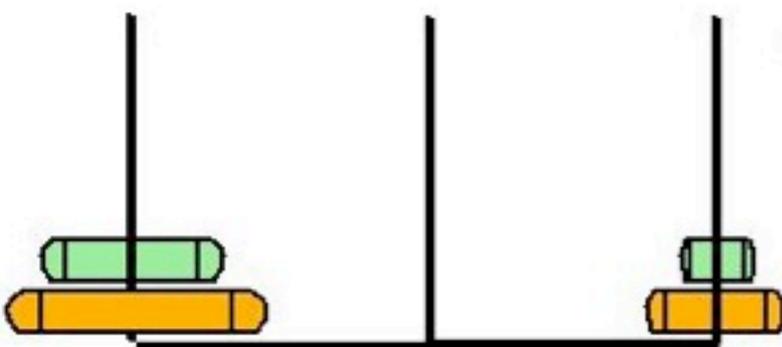
A => B



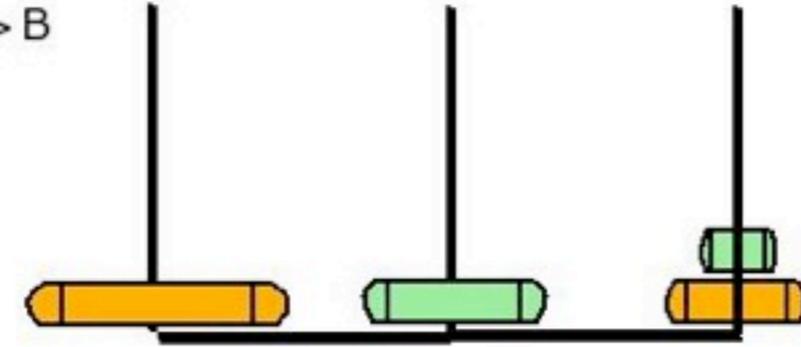
A => C



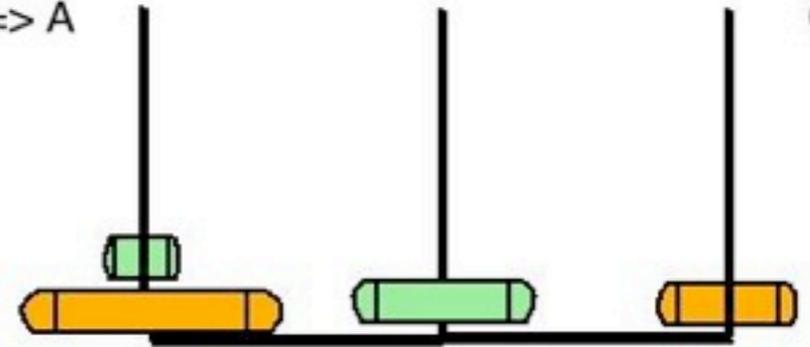
B => C



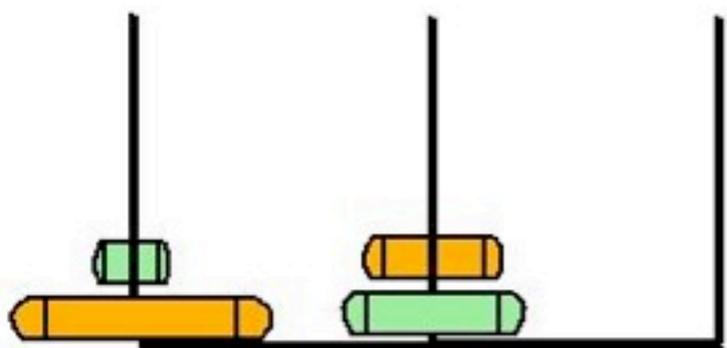
A => B



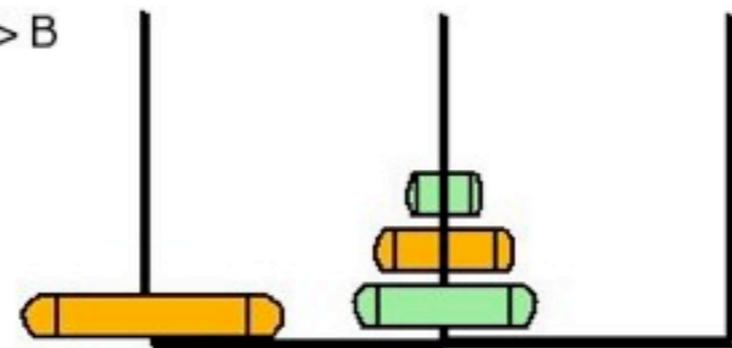
C => A



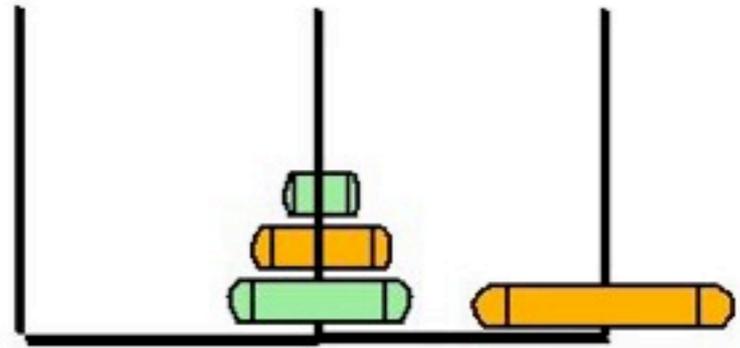
C => B



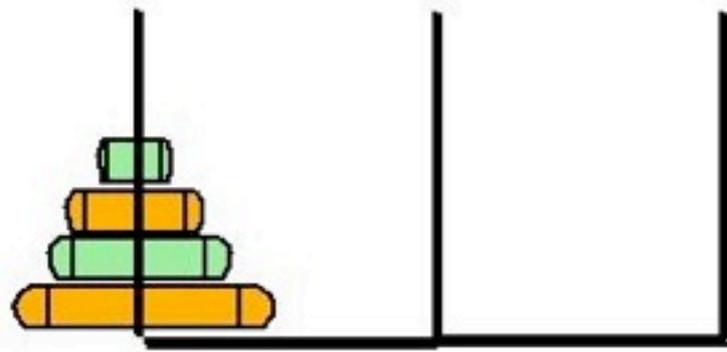
A => B



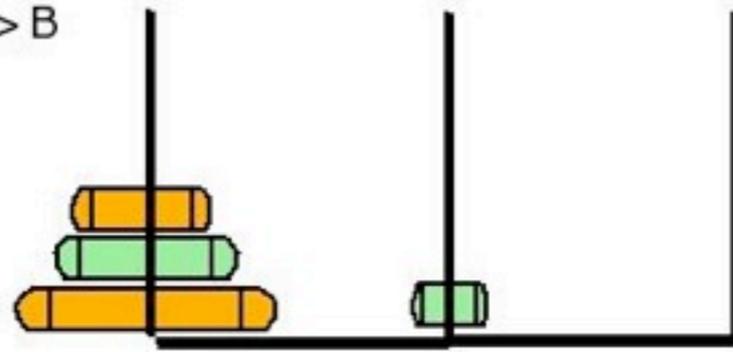
A => C



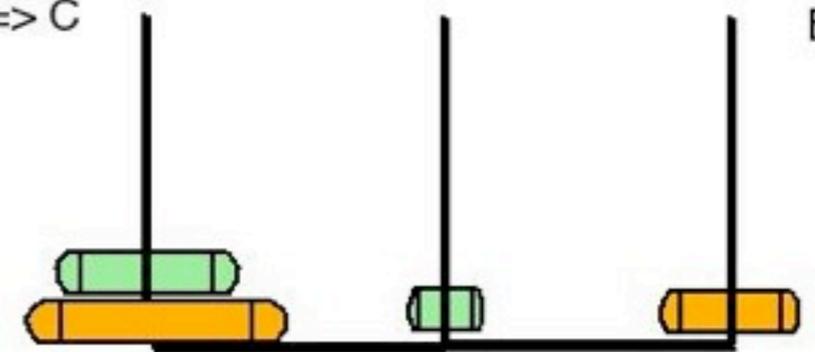
# Exemple



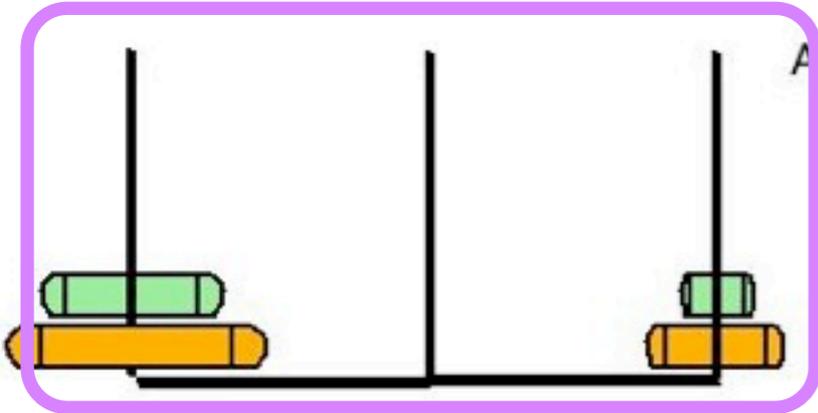
$A \Rightarrow B$



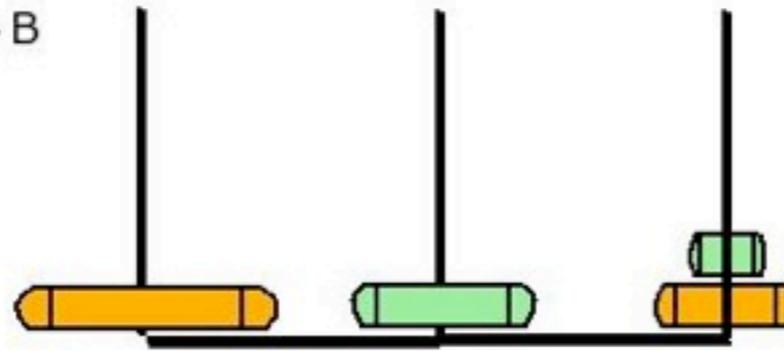
$A \Rightarrow C$



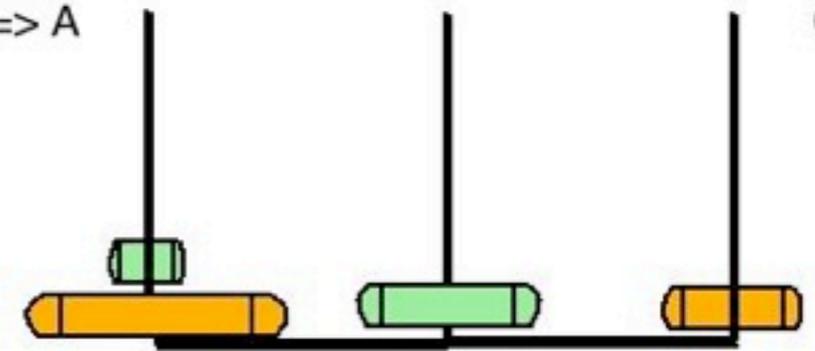
$B \Rightarrow C$



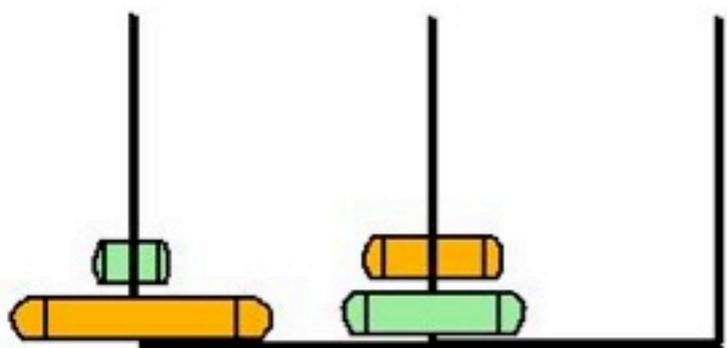
$A \Rightarrow B$



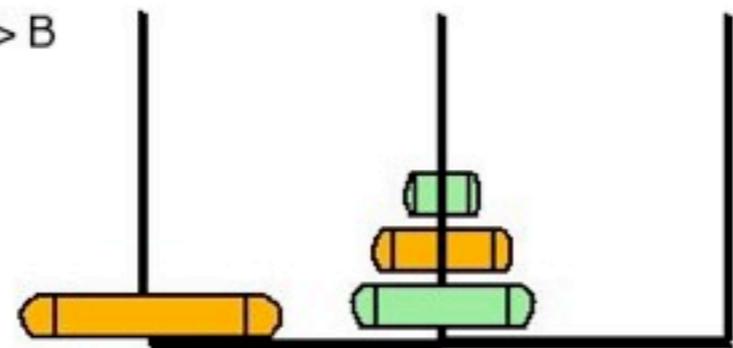
$C \Rightarrow A$



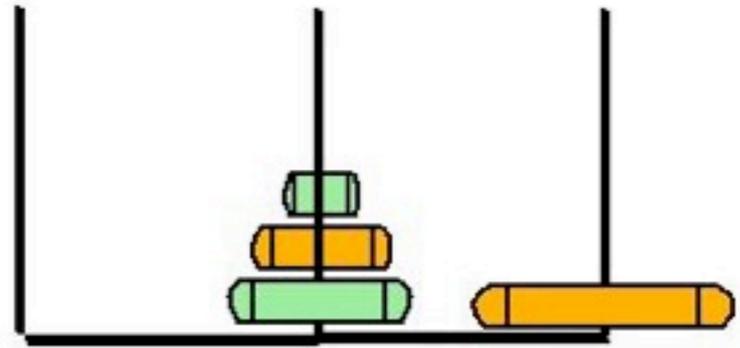
$C \Rightarrow B$



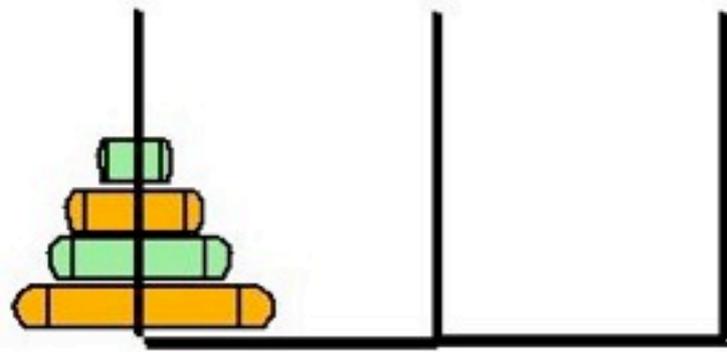
$A \Rightarrow B$



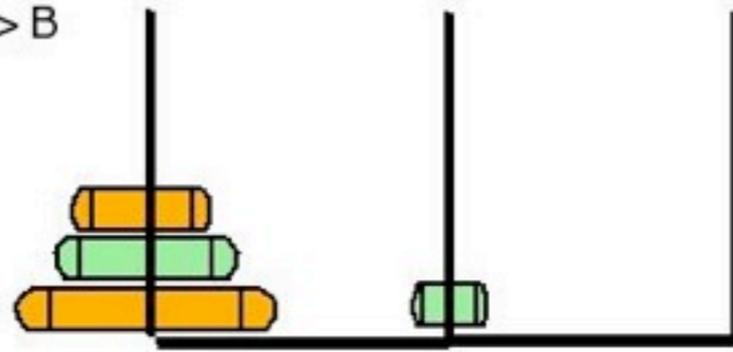
$A \Rightarrow C$



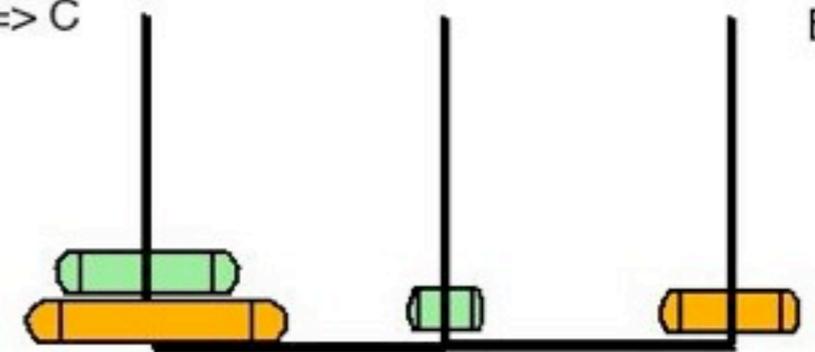
# Exemple



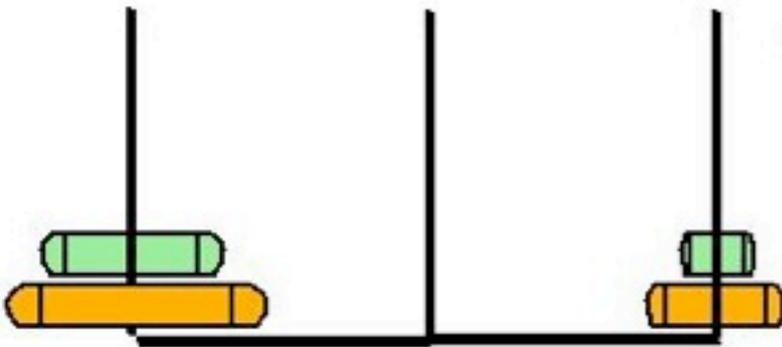
$A \Rightarrow B$



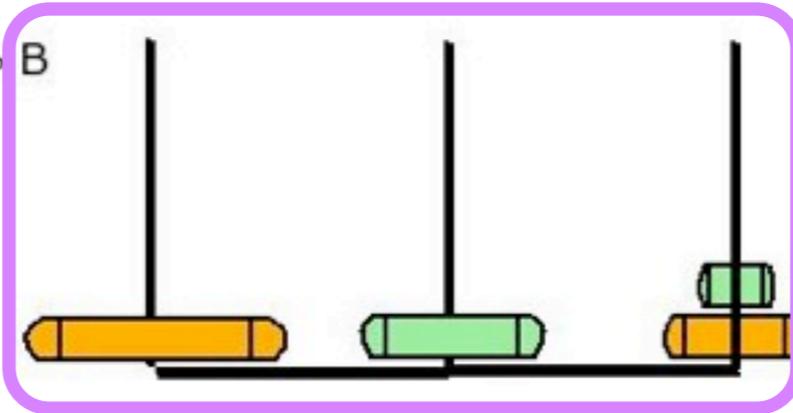
$A \Rightarrow C$



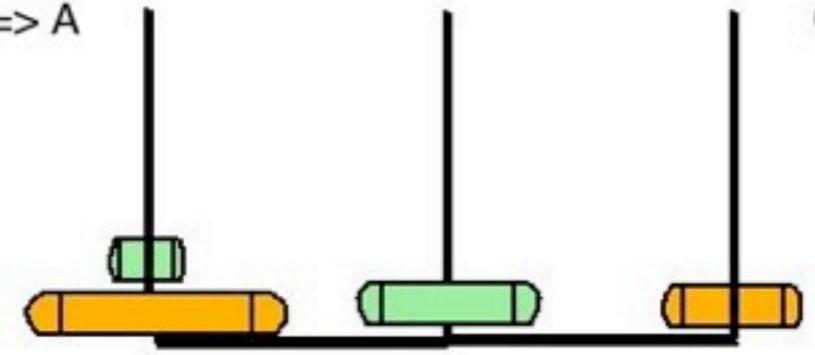
$B \Rightarrow C$



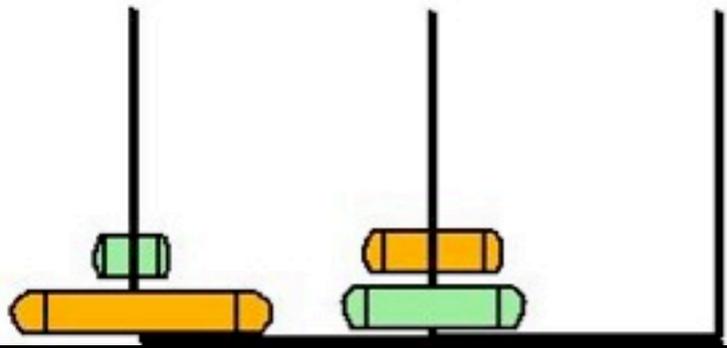
$A \Rightarrow B$



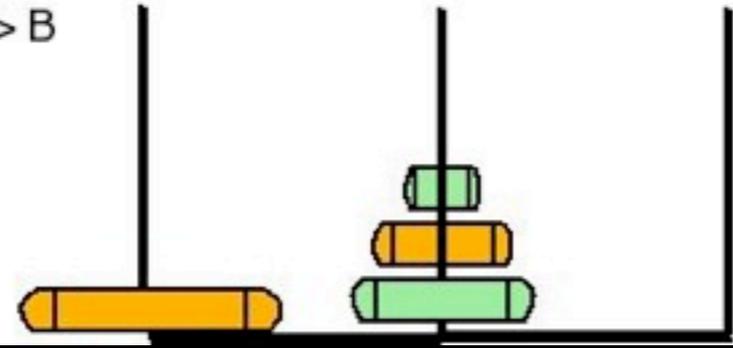
$C \Rightarrow A$



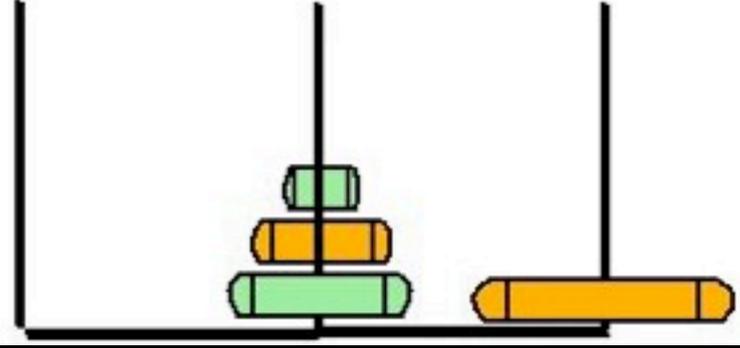
$C \Rightarrow B$



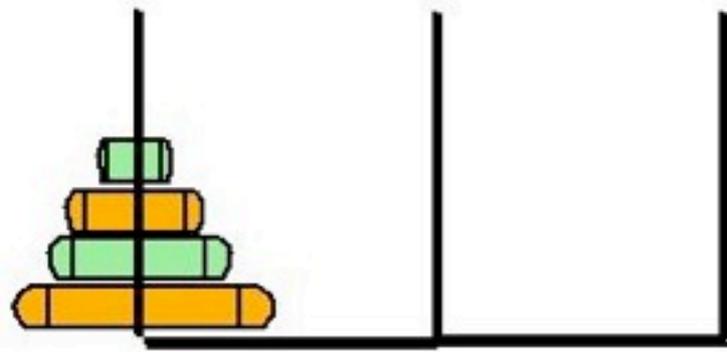
$A \Rightarrow B$



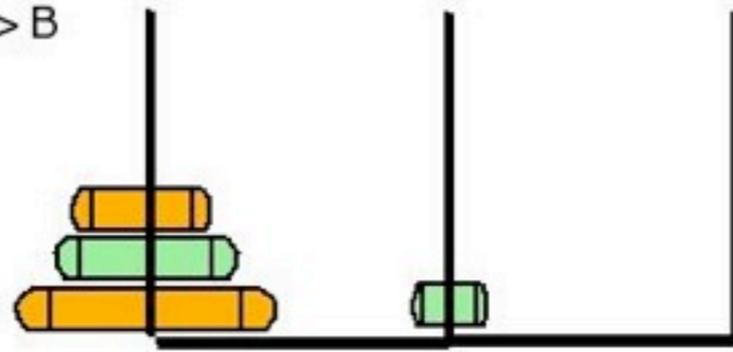
$A \Rightarrow C$



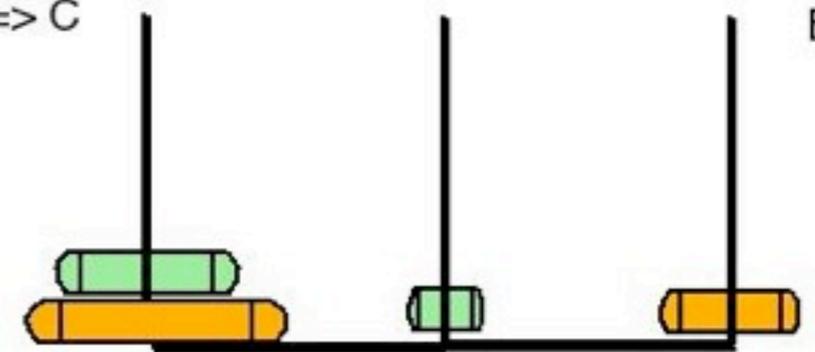
# Exemple



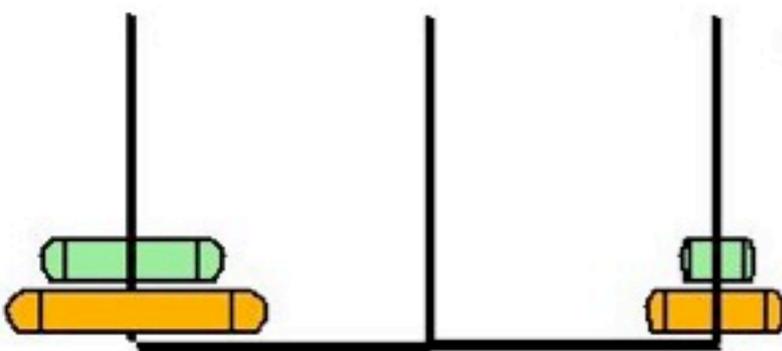
A => B



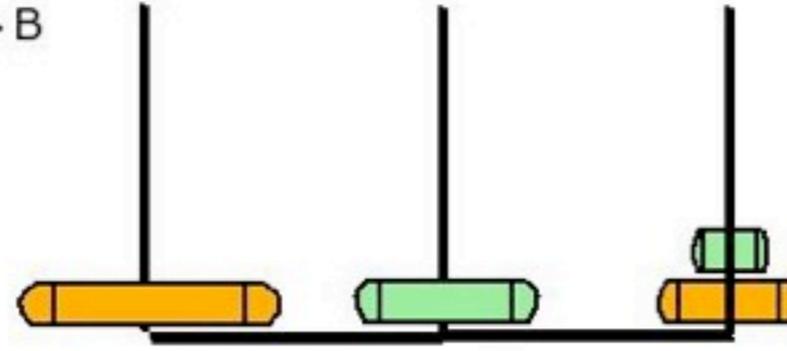
A => C



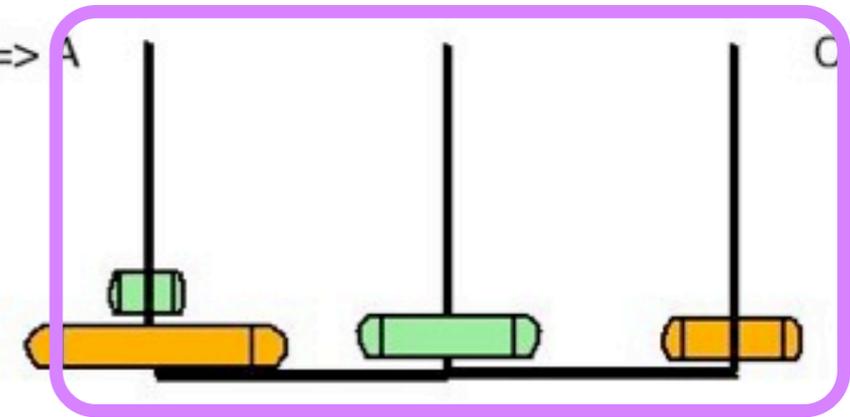
B => C



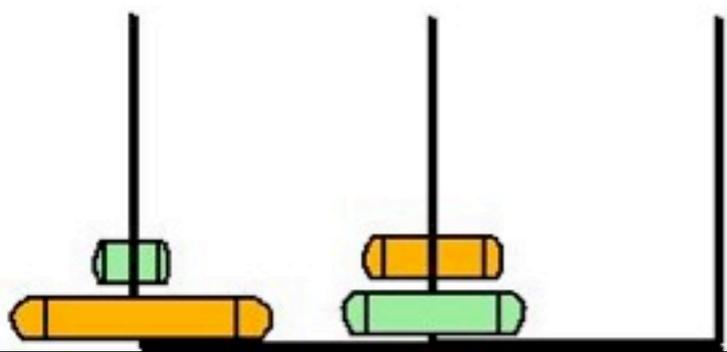
A => B



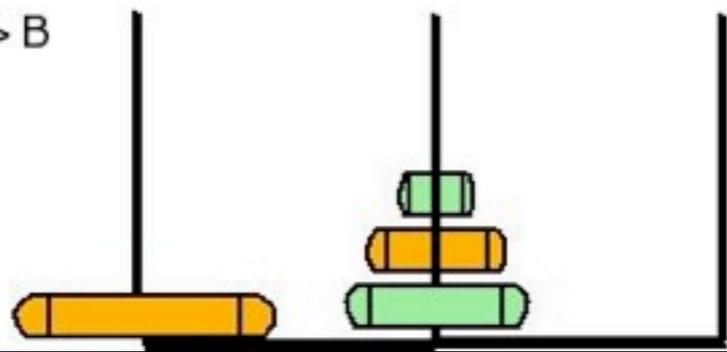
C => A



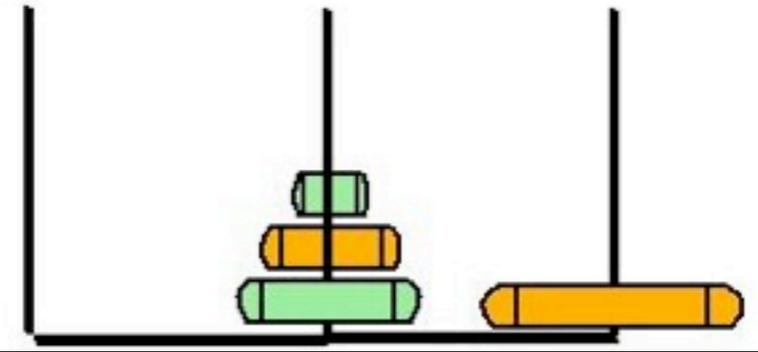
C => B



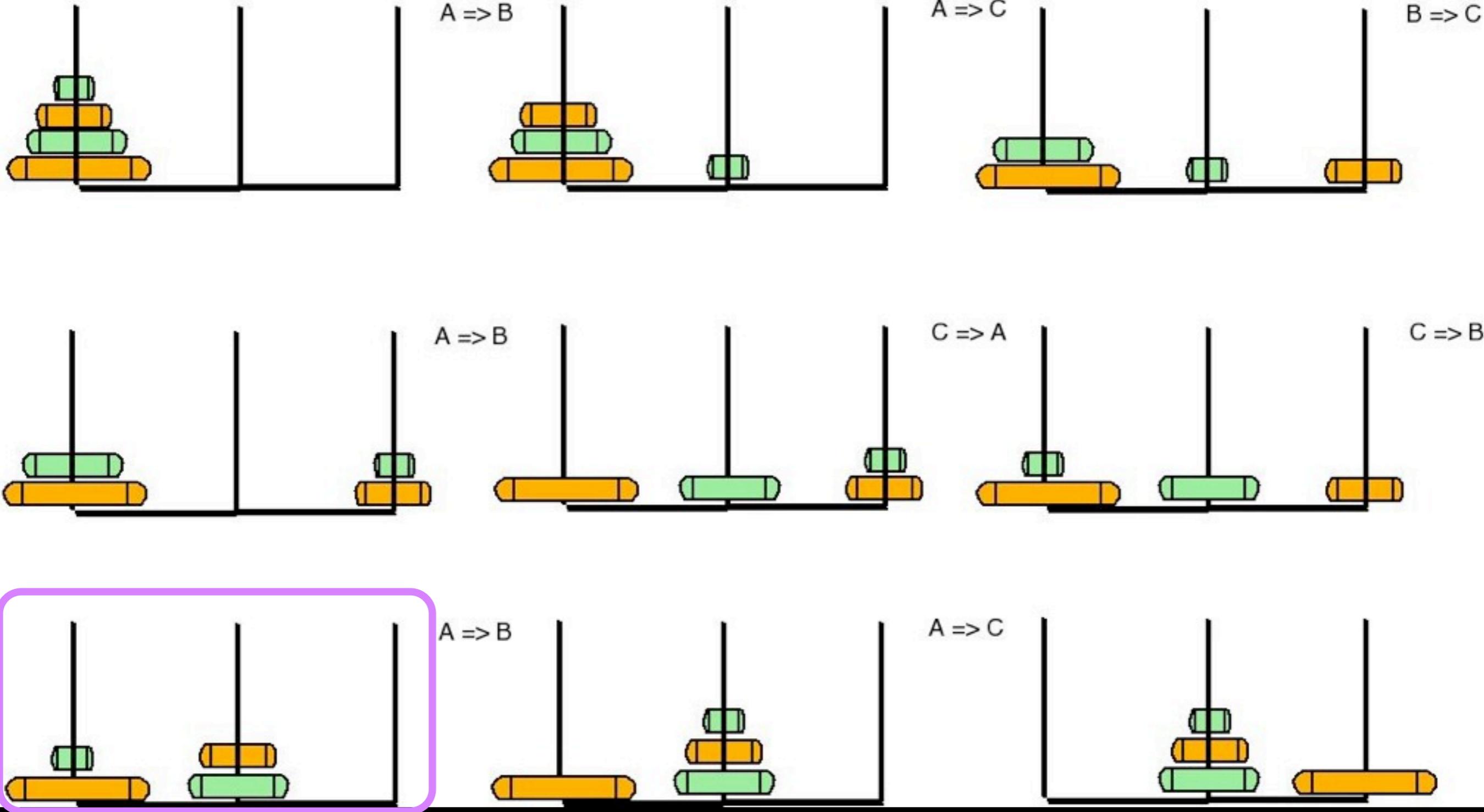
A => B



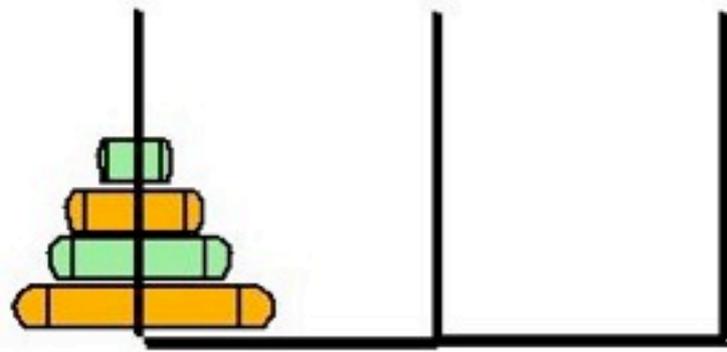
A => C



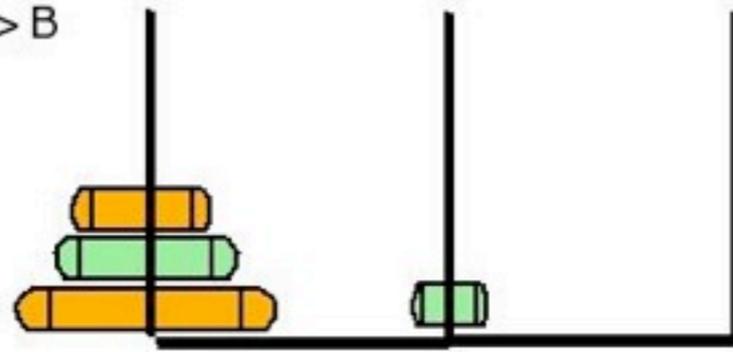
# Exemple



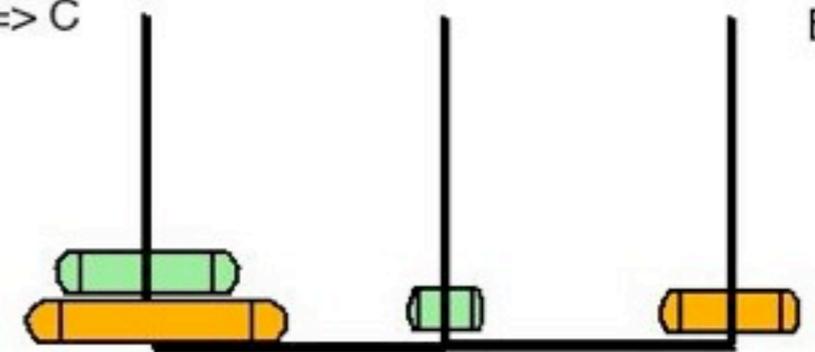
# Exemple



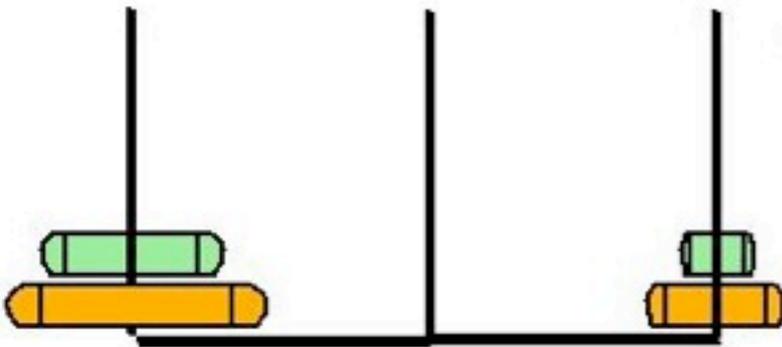
$A \Rightarrow B$



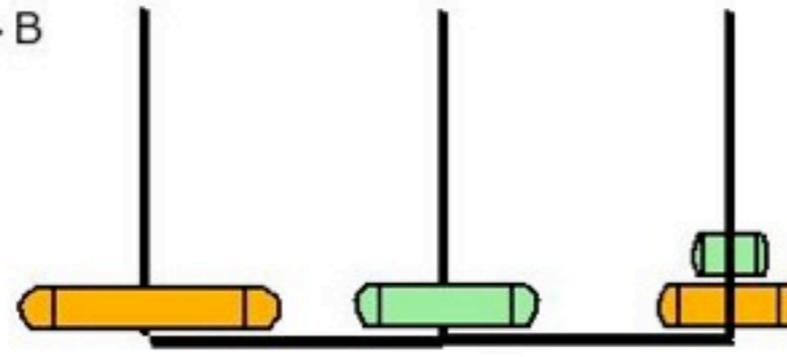
$A \Rightarrow C$



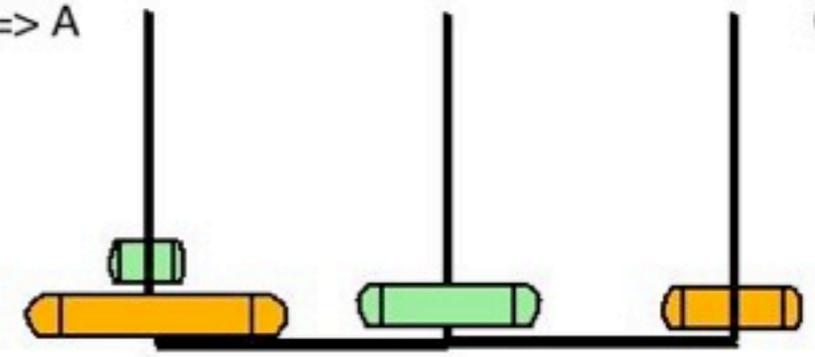
$B \Rightarrow C$



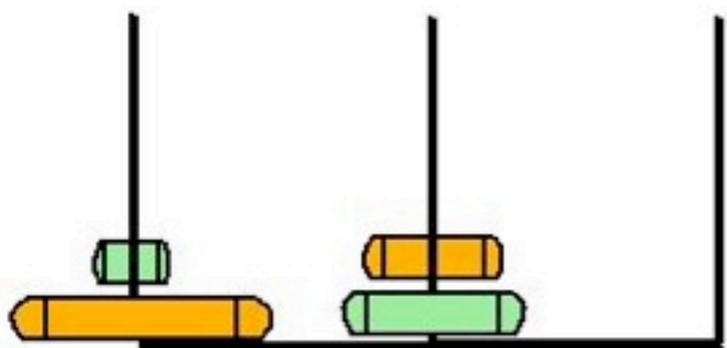
$A \Rightarrow B$



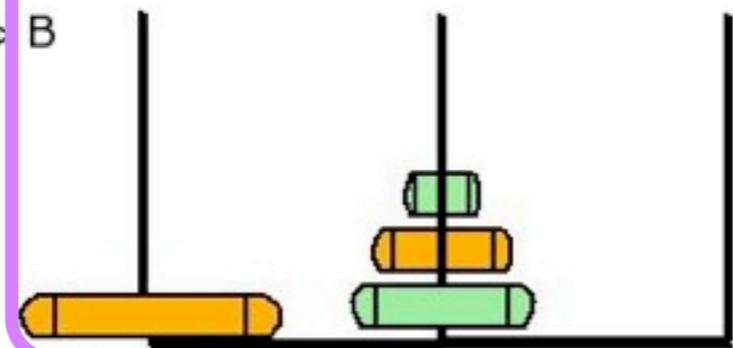
$C \Rightarrow A$



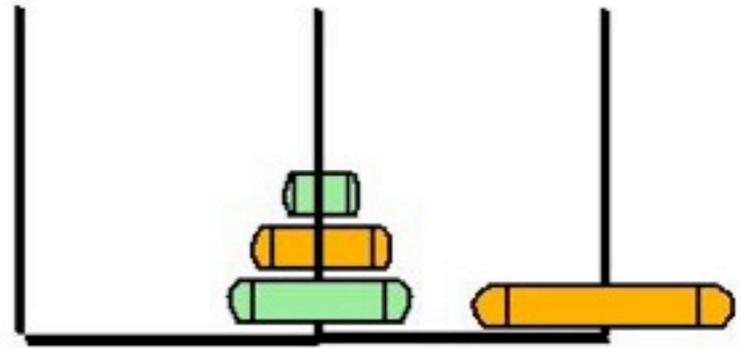
$C \Rightarrow B$



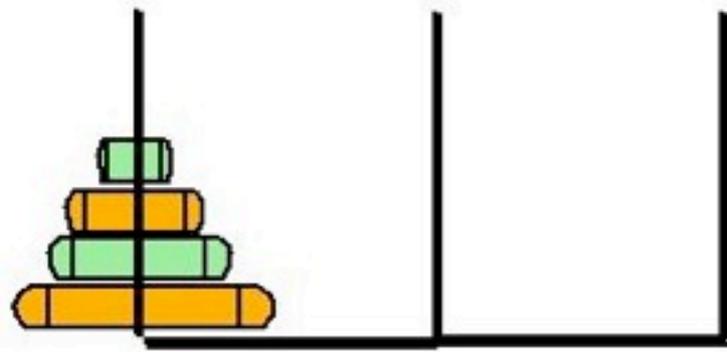
$A \Rightarrow B$



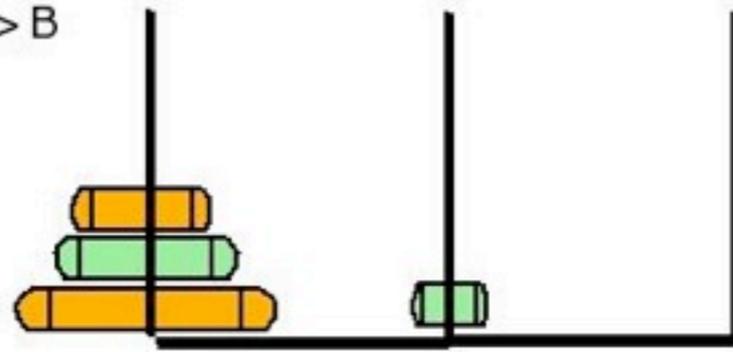
$A \Rightarrow C$



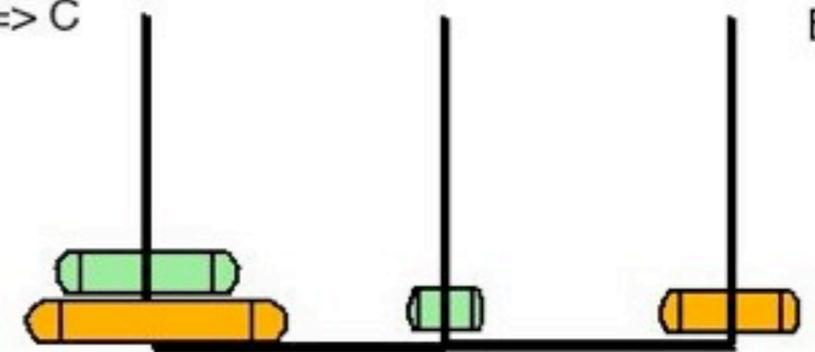
# Exemple



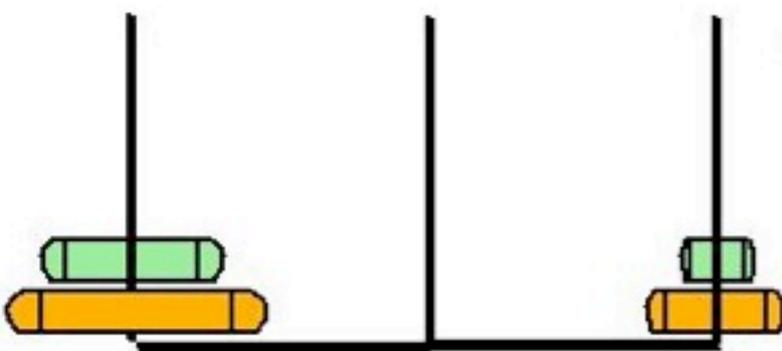
$A \Rightarrow B$



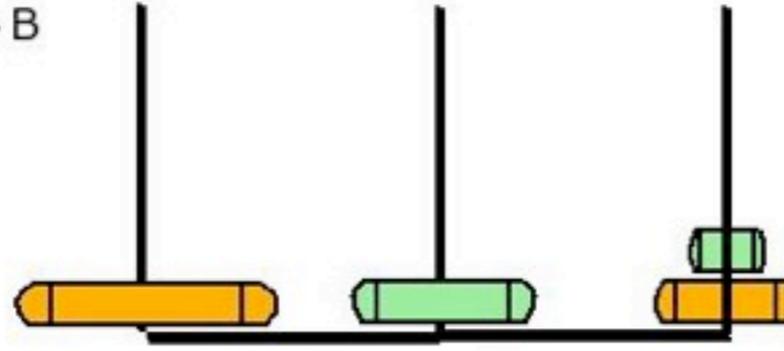
$A \Rightarrow C$



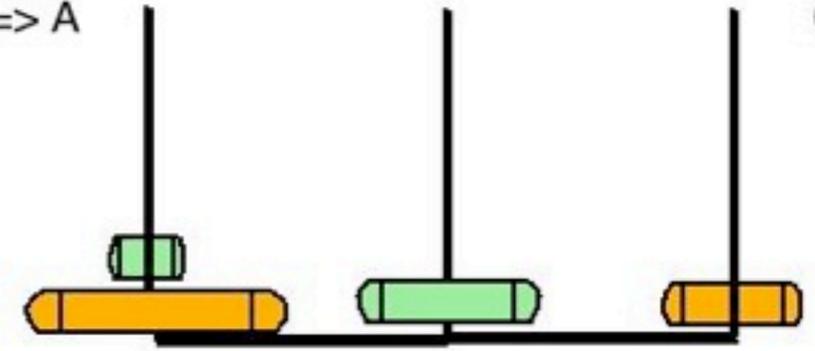
$B \Rightarrow C$



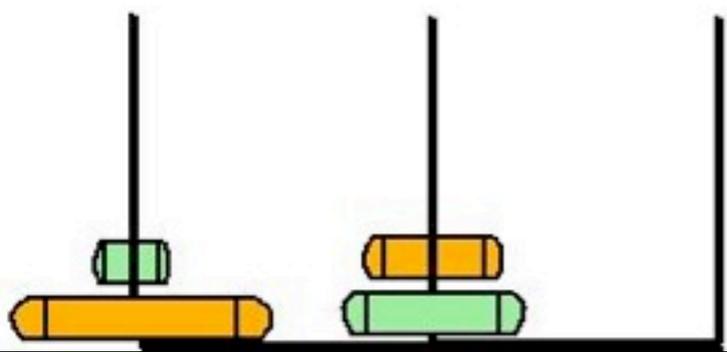
$A \Rightarrow B$



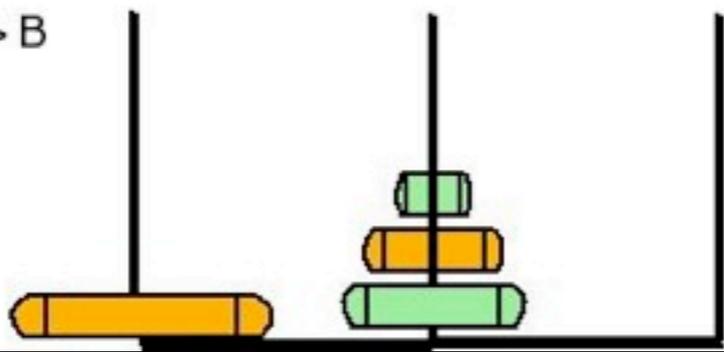
$C \Rightarrow A$



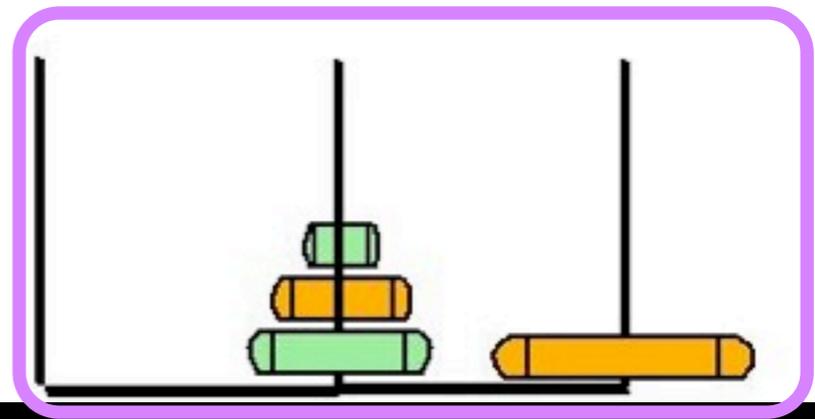
$C \Rightarrow B$



$A \Rightarrow B$



$A \Rightarrow C$



Pourquoi cet algorithme est-il correct ?

# Pourquoi cet algorithme est-il correct ?



# Pourquoi cet algorithme est-il correct ?

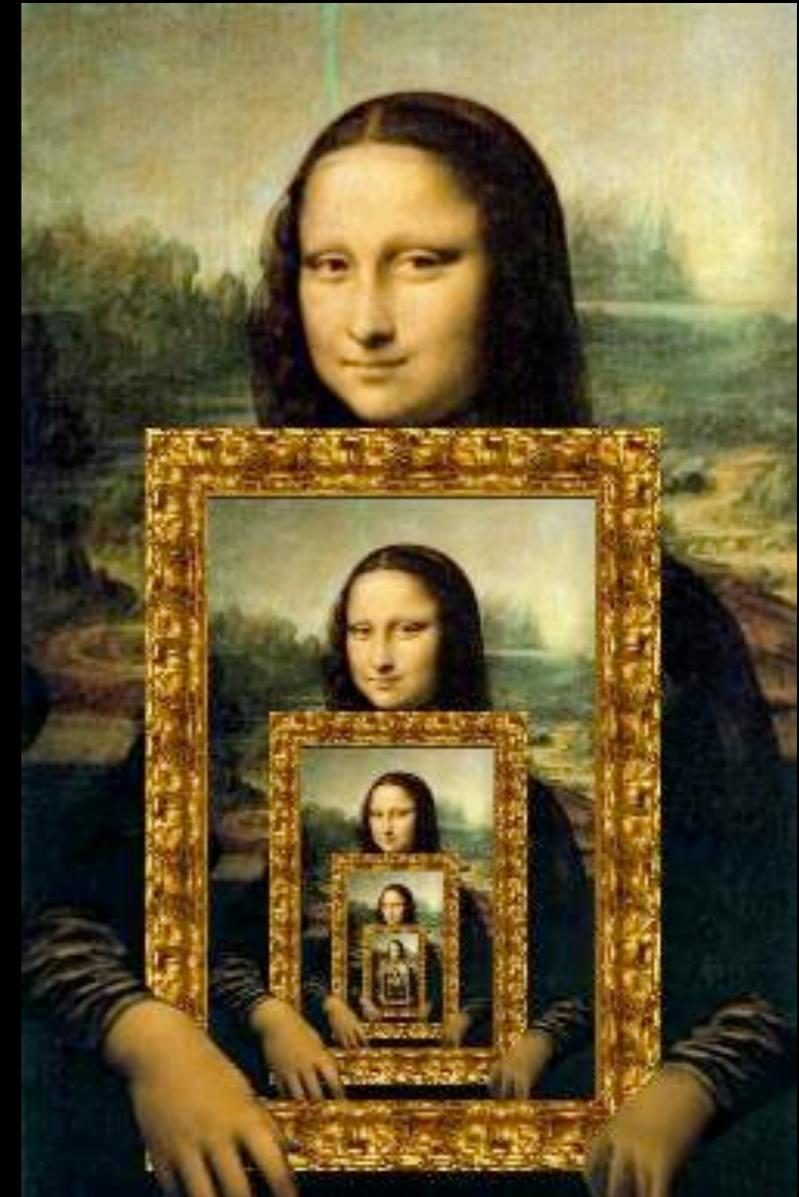
êtes-vous sûr que les disques finiront tous dans un autre aiguille?



# Récurtivité

# Récurtivité

Moyen de définir un  
concept en invoquant  
le même concept

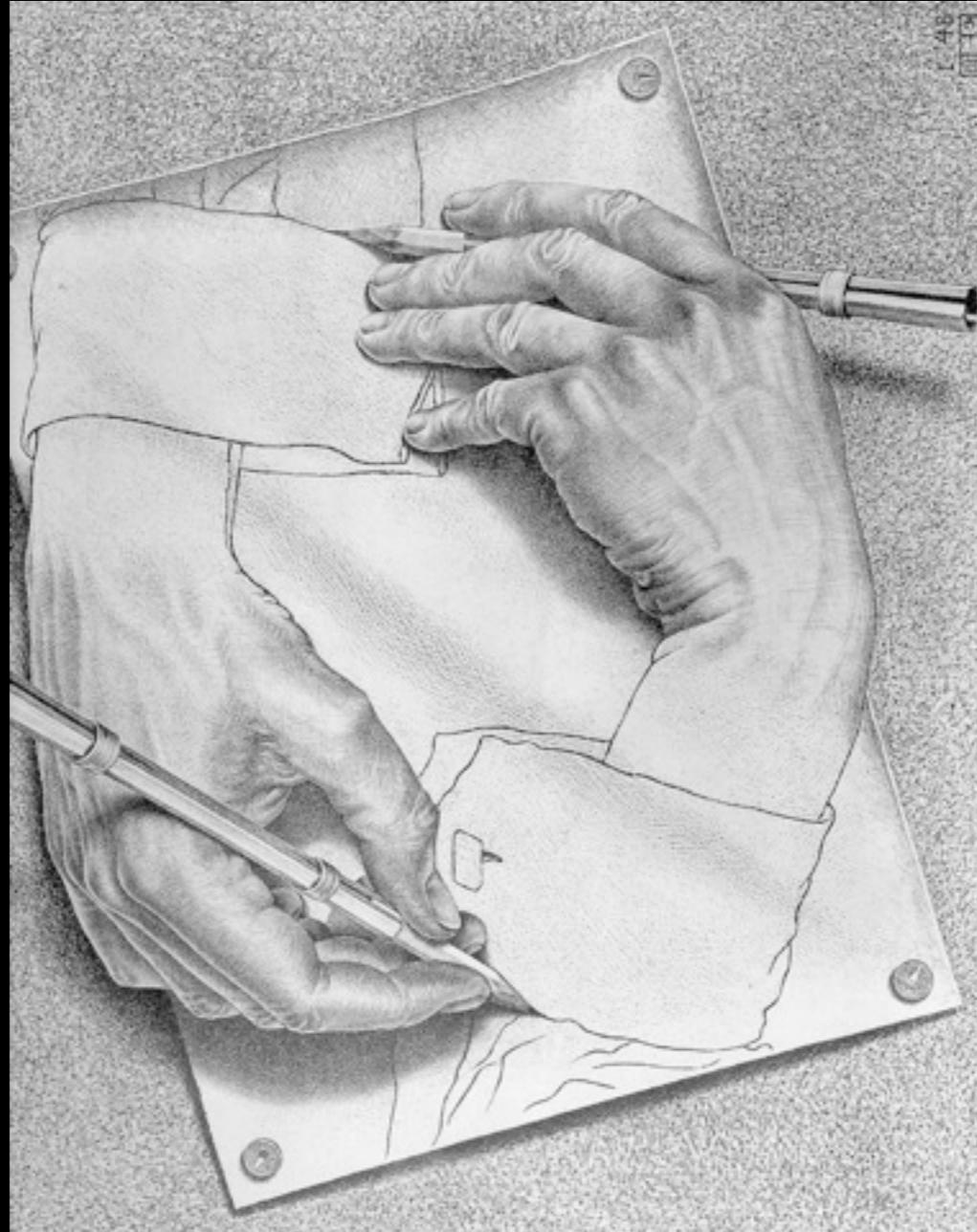


# Récurtivité

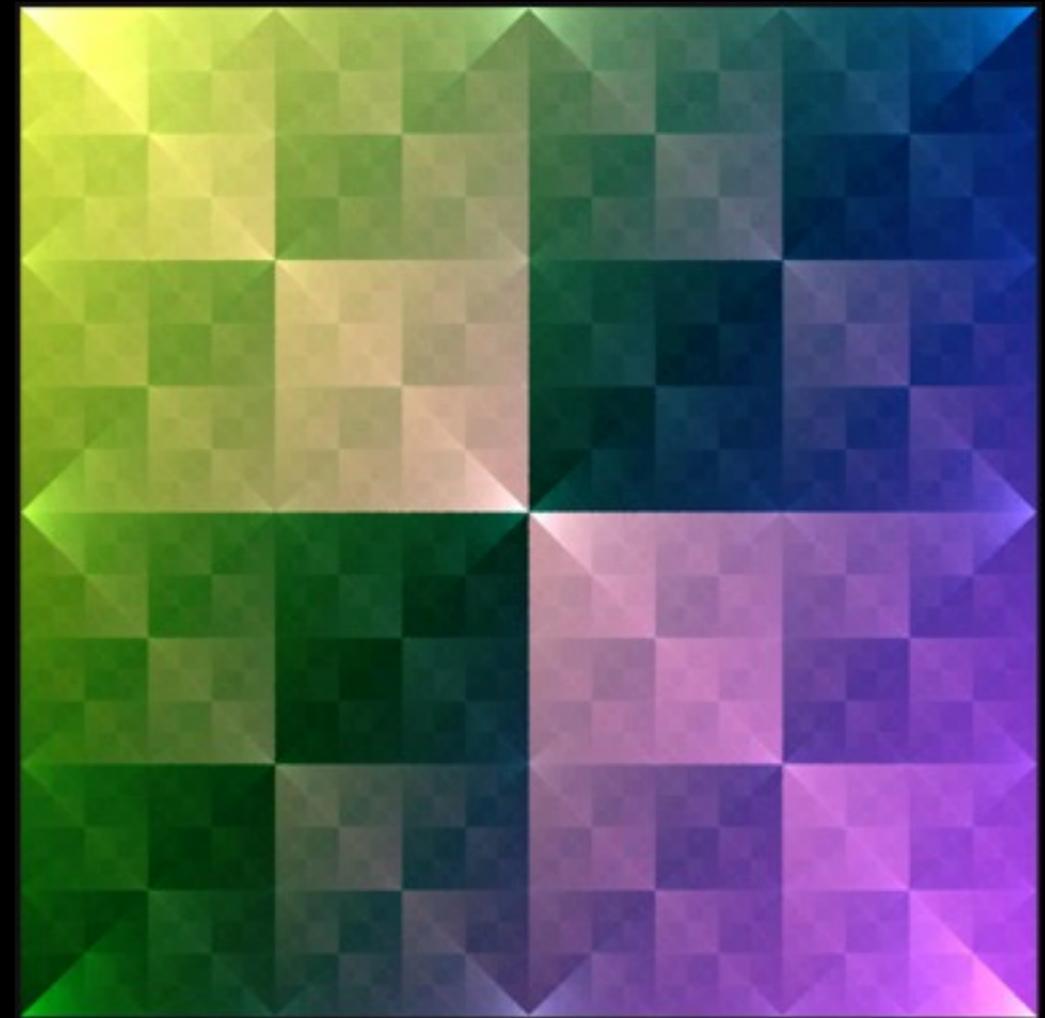
Résoudre un problème en utilisant des solutions intermédiaires du même problème



Pour que ceci ait un  
sens...



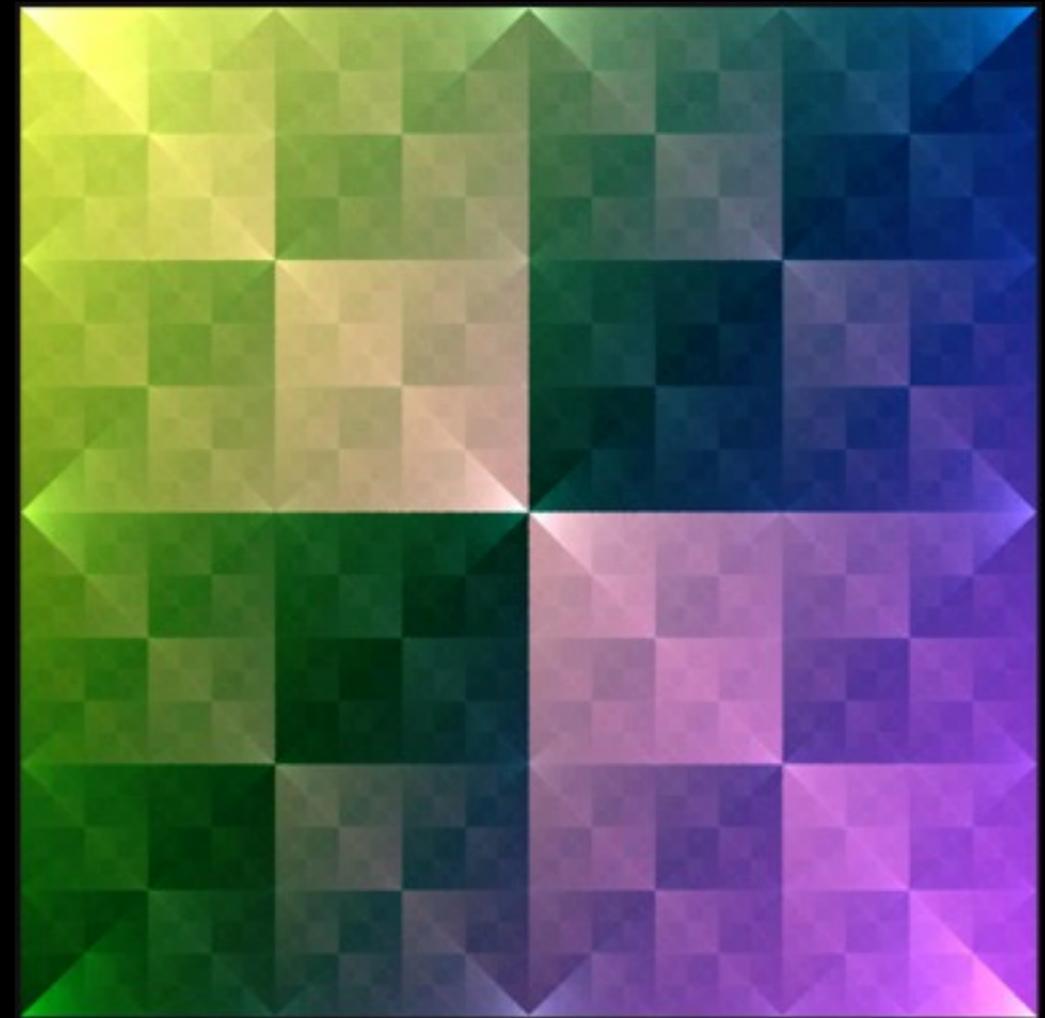
Pour que ceci ait un  
sens, on doit...



[http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Sierpinski\\_square.jpg](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Sierpinski_square.jpg)

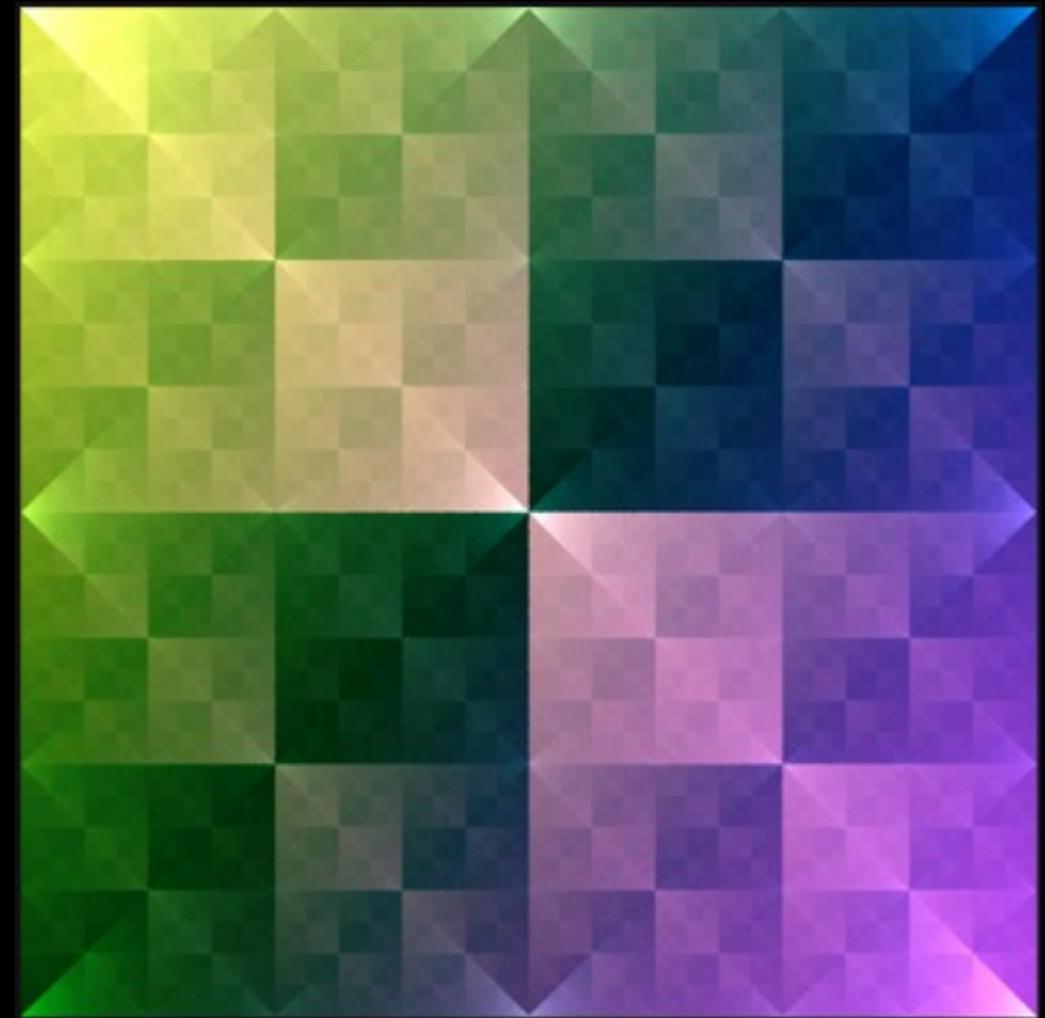
# Pour que ceci ait un sens, on doit...

- I. définir un concept en invoquant une *plus petite* version de lui-même

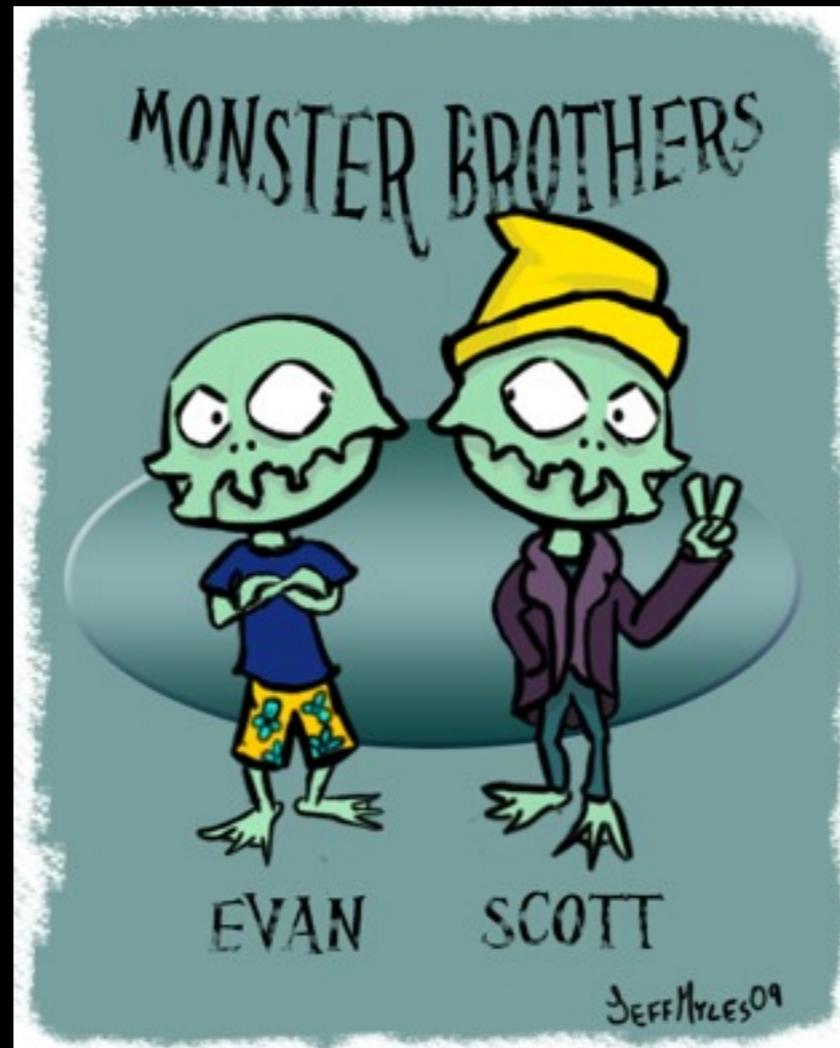


# Pour que ceci ait un sens, on doit...

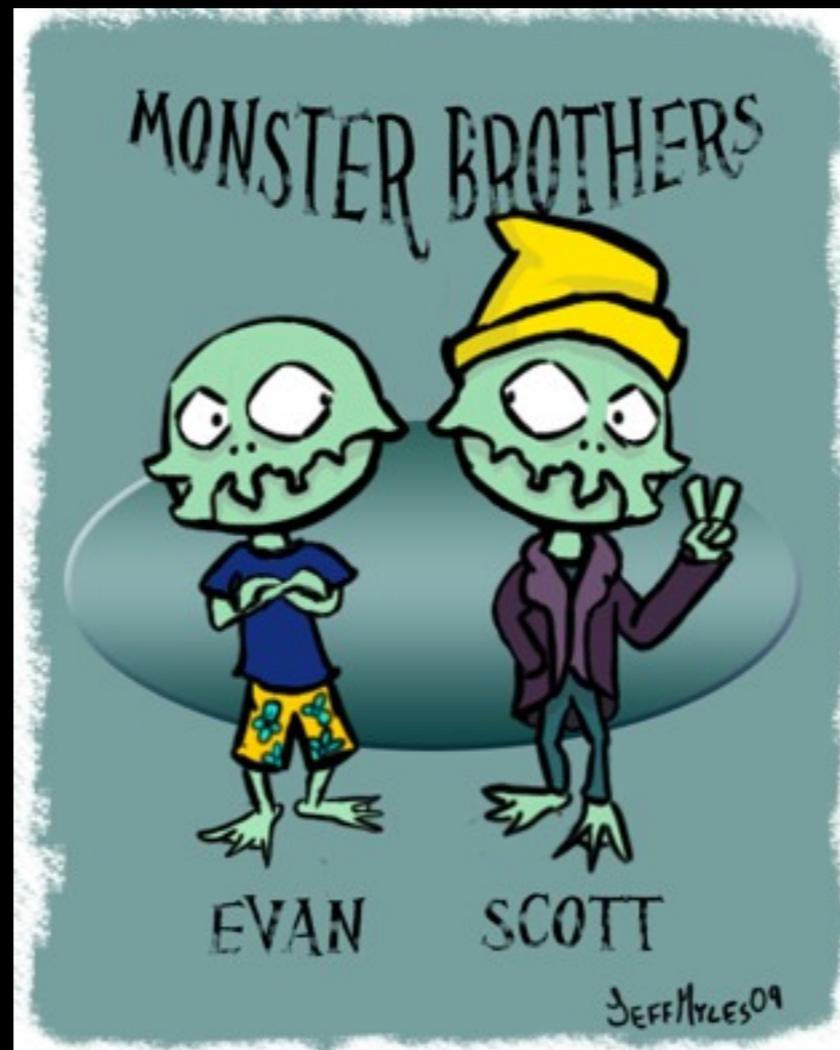
1. définir un concept en invoquant une *plus petite* version de lui-même
2. Répéter jusqu'à arriver à un concept de base, très simple



# Récurtivité en utilisant “votre petit frère”

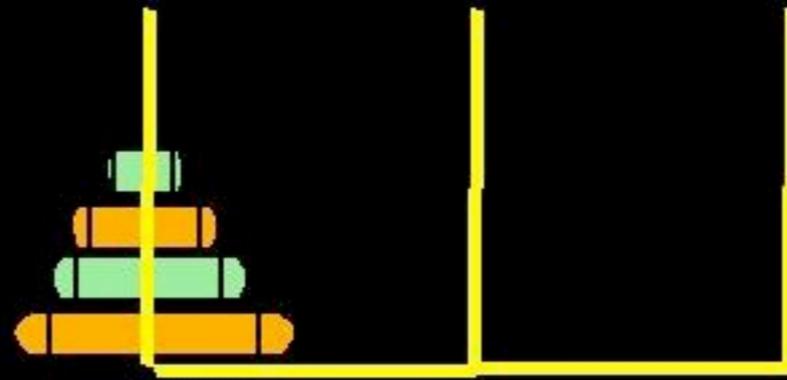


# Récurtivité en utilisant “votre petit frère”

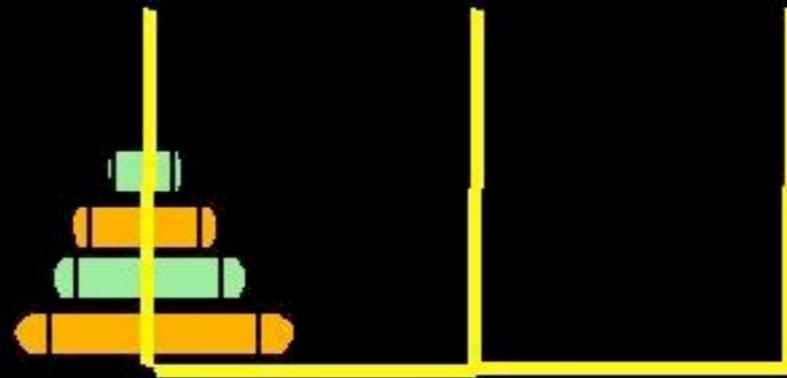
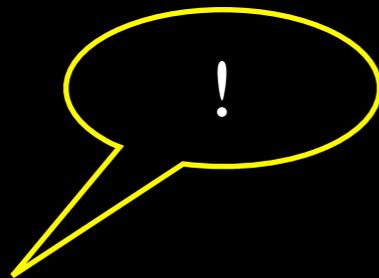


Comment puis-je  
résoudre le problème  
des Tours de Hanoi ?

4 disques c'est  
beaucoup !

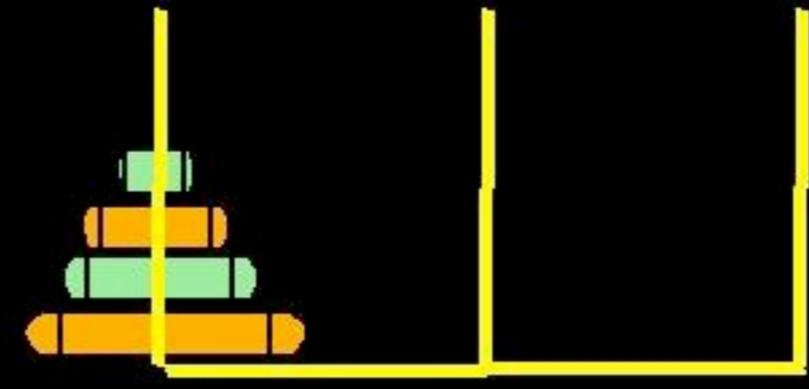


Je demande l'aide de  
mon petit frère pour  
un problème de  
seulement 3 disques



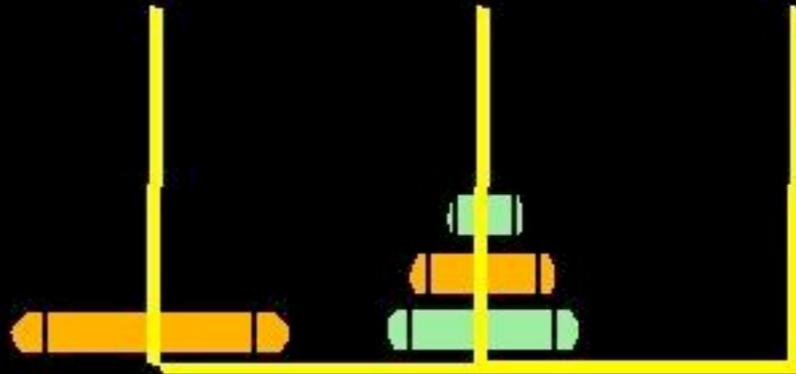
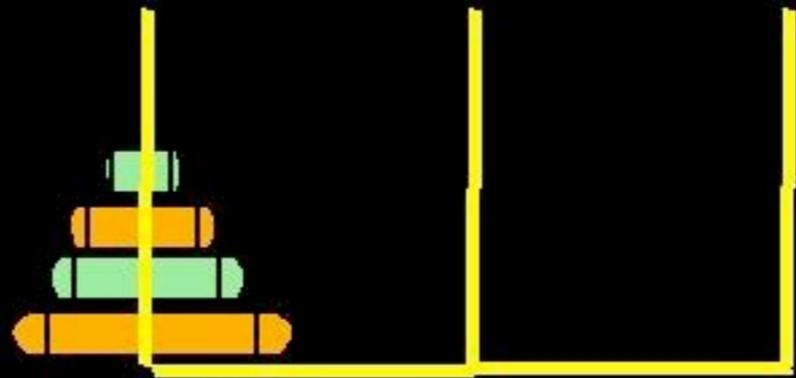


déplace 3



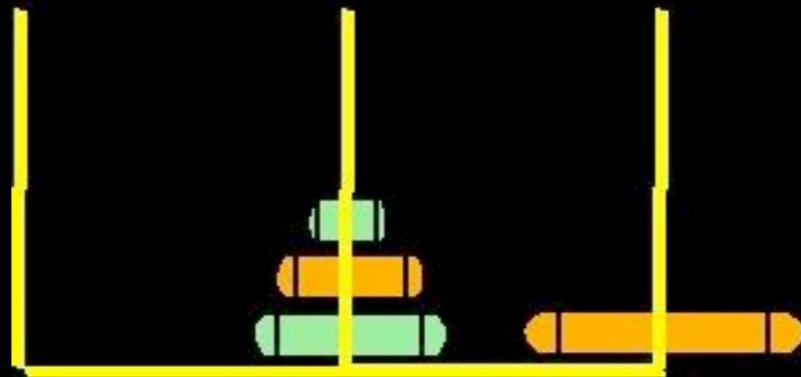
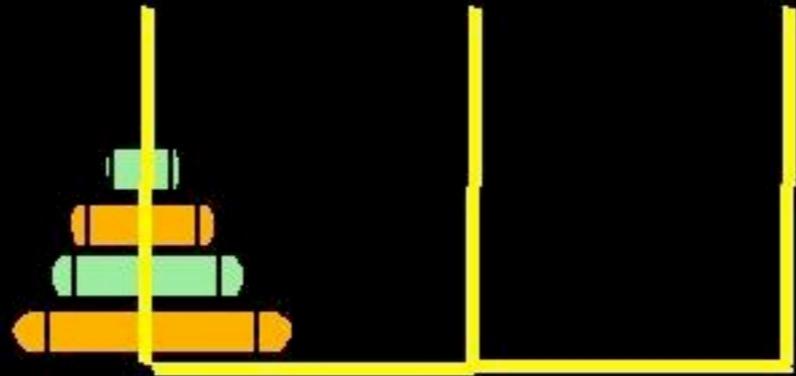


merci !



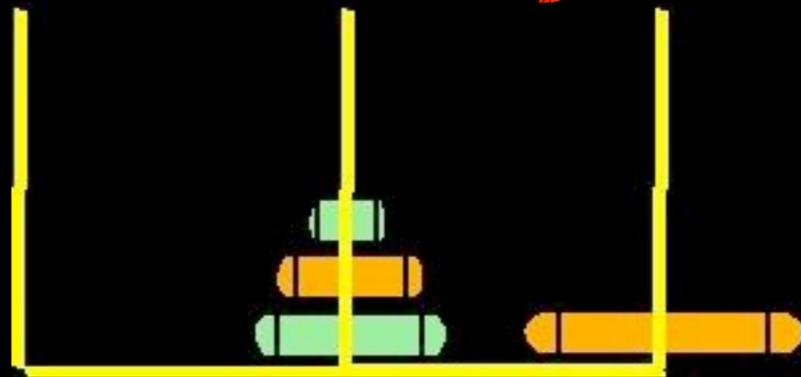
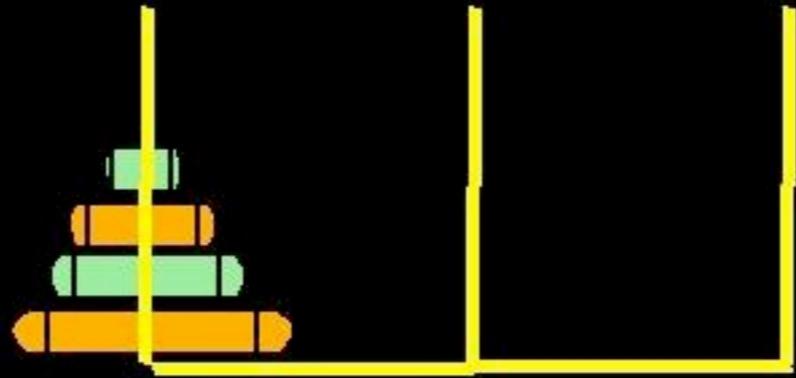


Je déplace 1



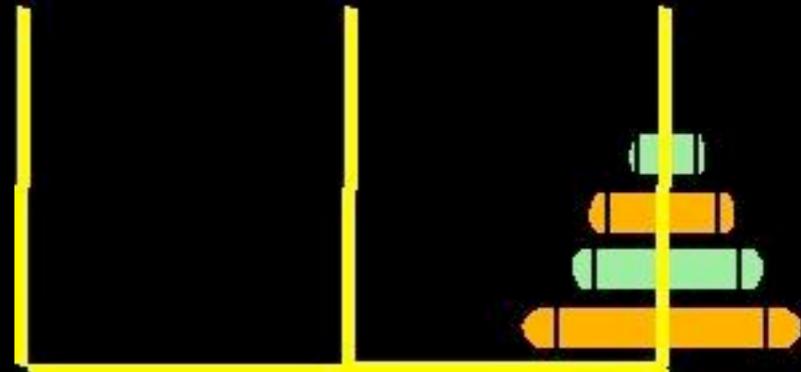
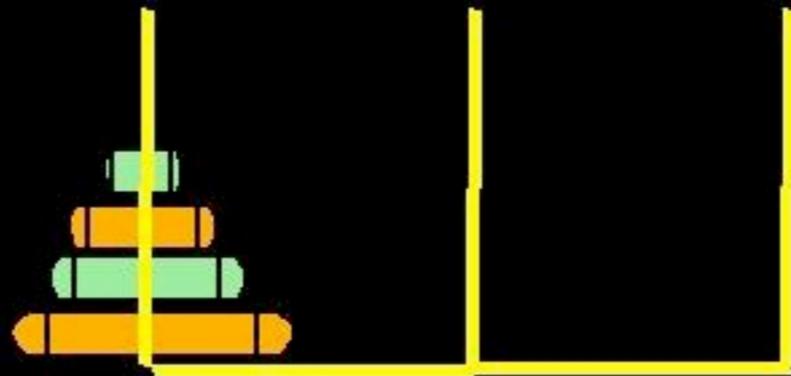


aide moi encore





merci !

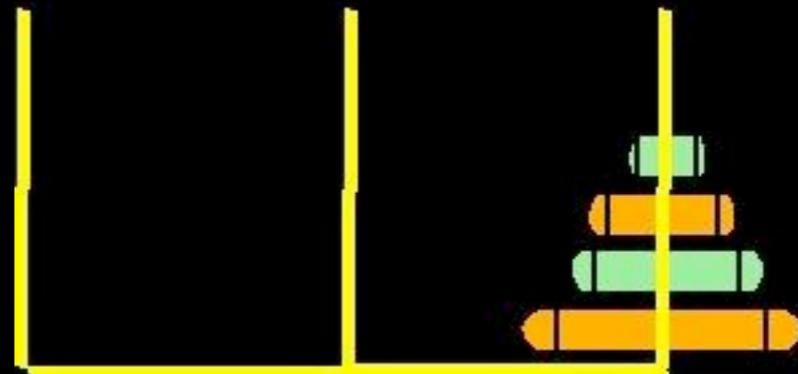
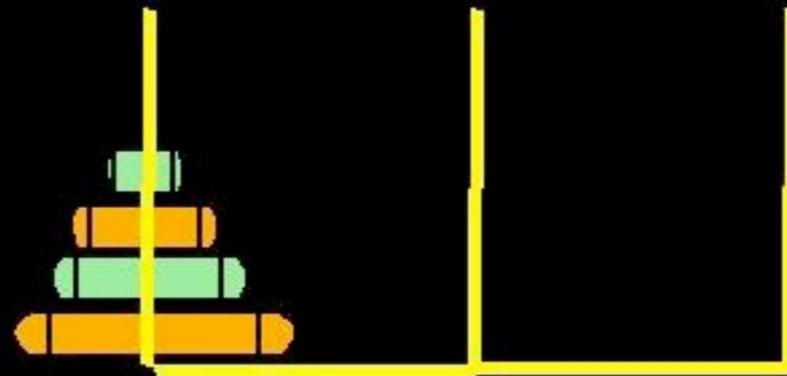




merci !

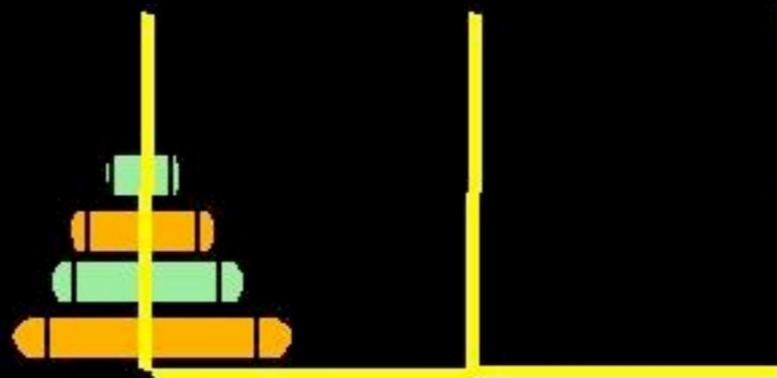


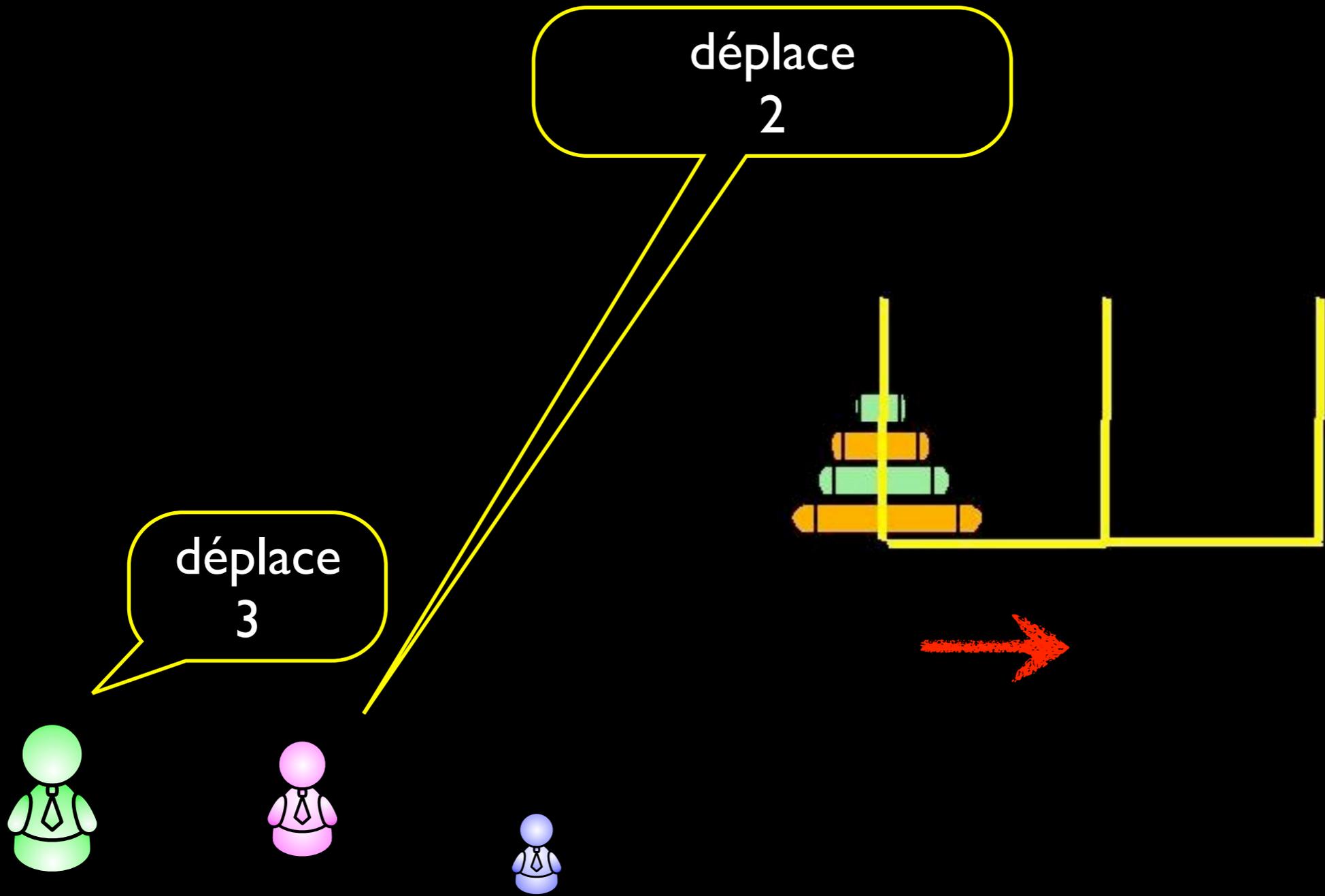
Nous avons fini !

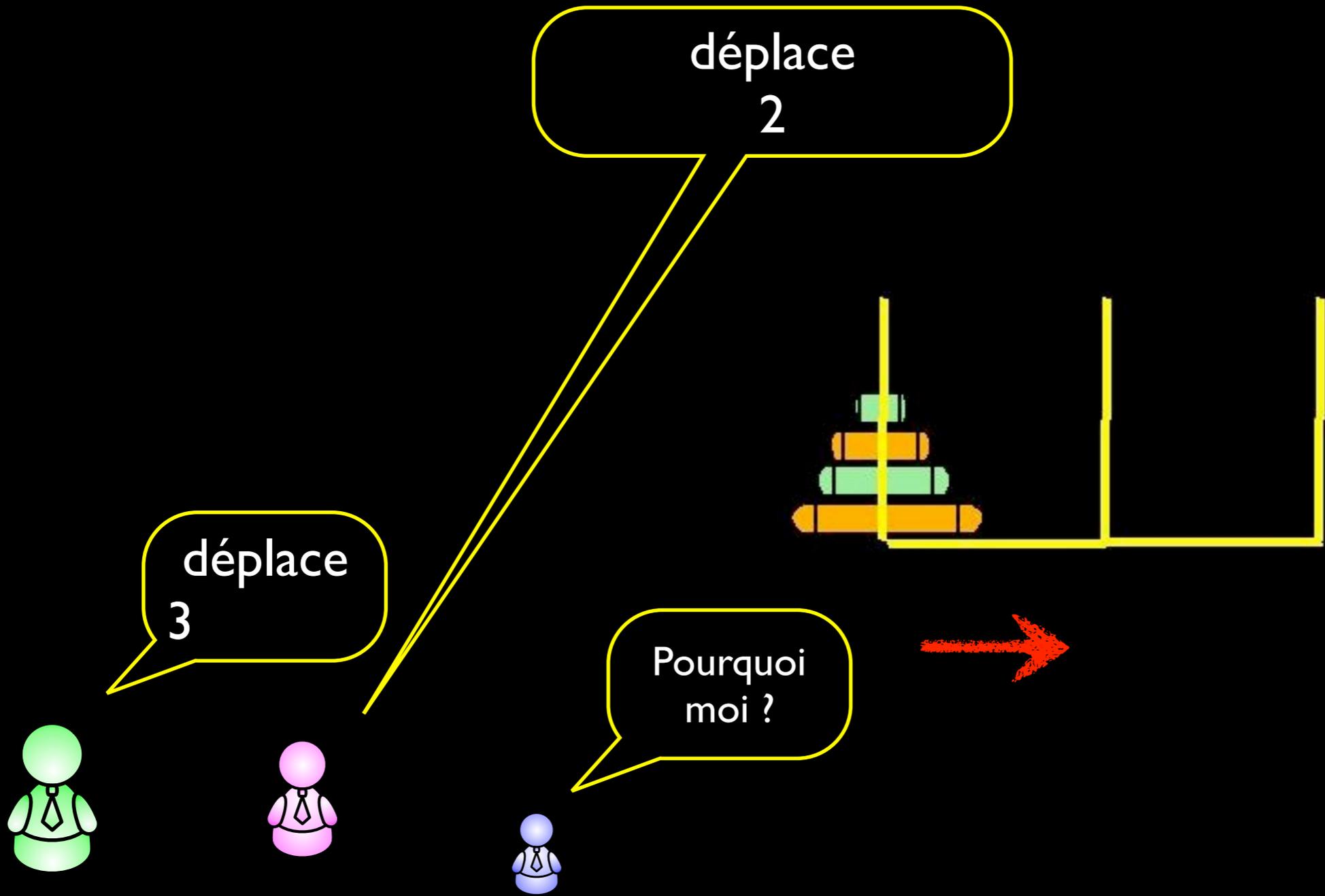


Comment faire ?

déplace  
3



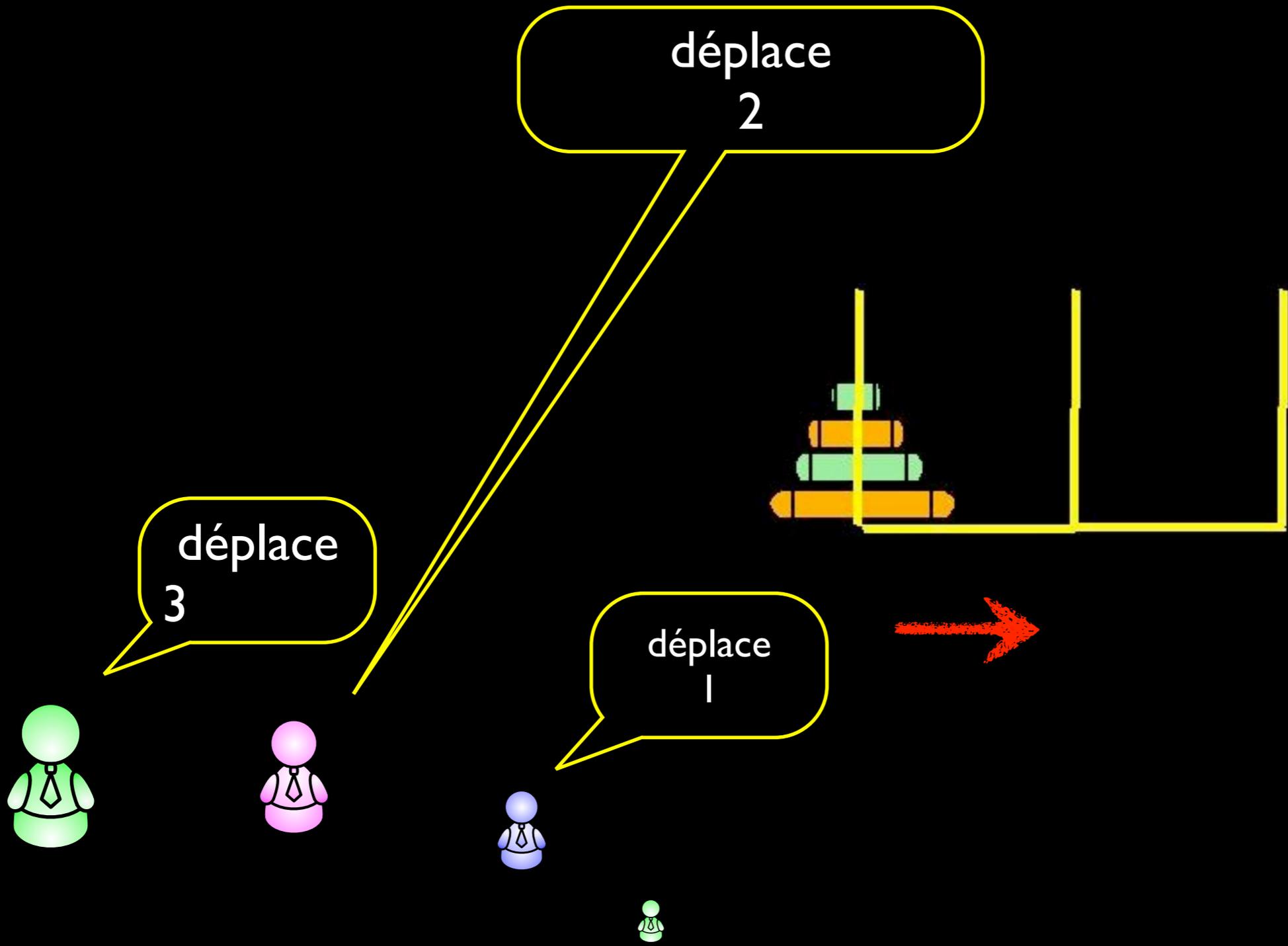


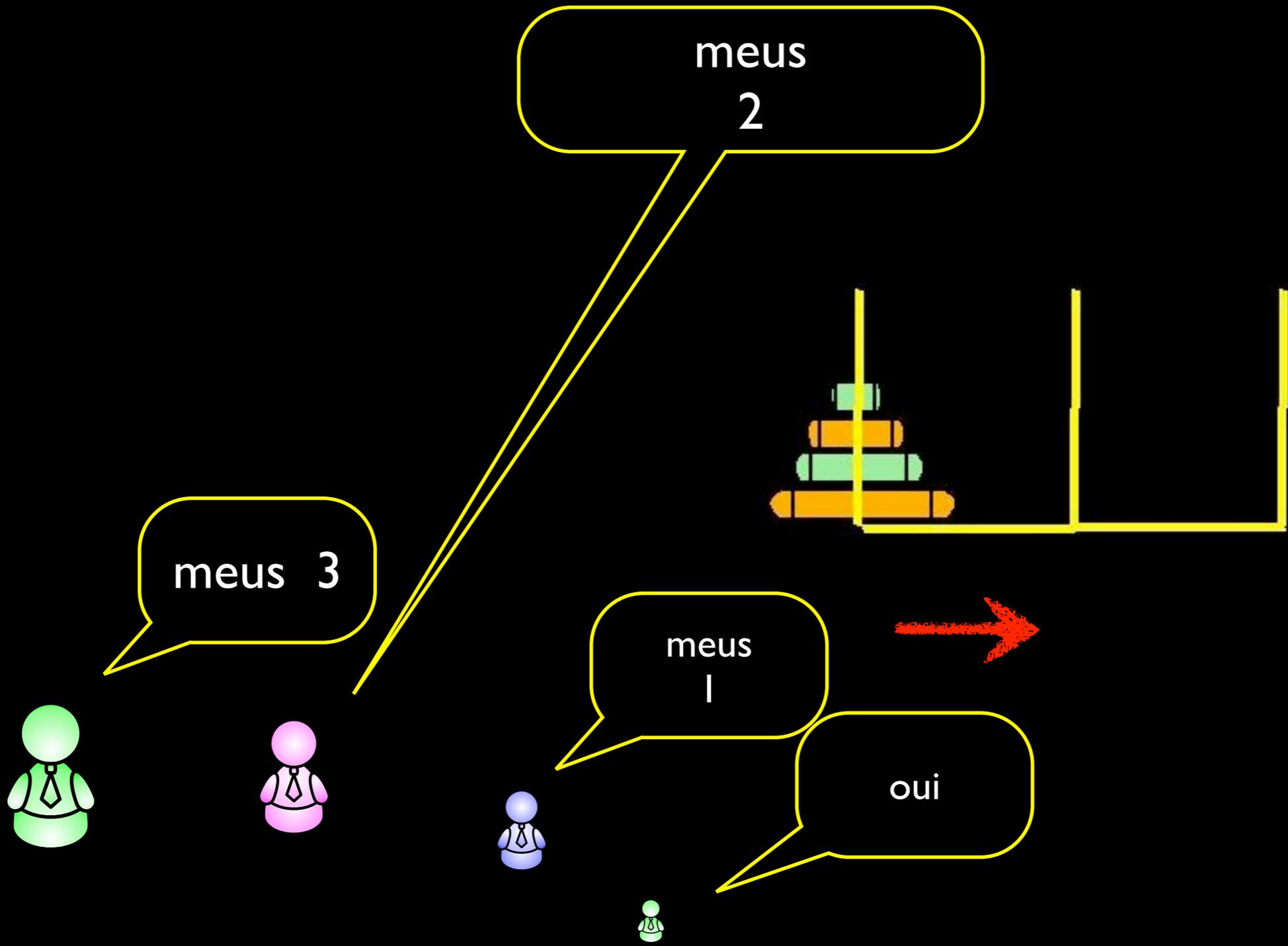


déplace  
3

déplace  
2

Pourquoi  
moi ?





meus 3

meus  
2

meus  
1

oui

Essayez vous même !

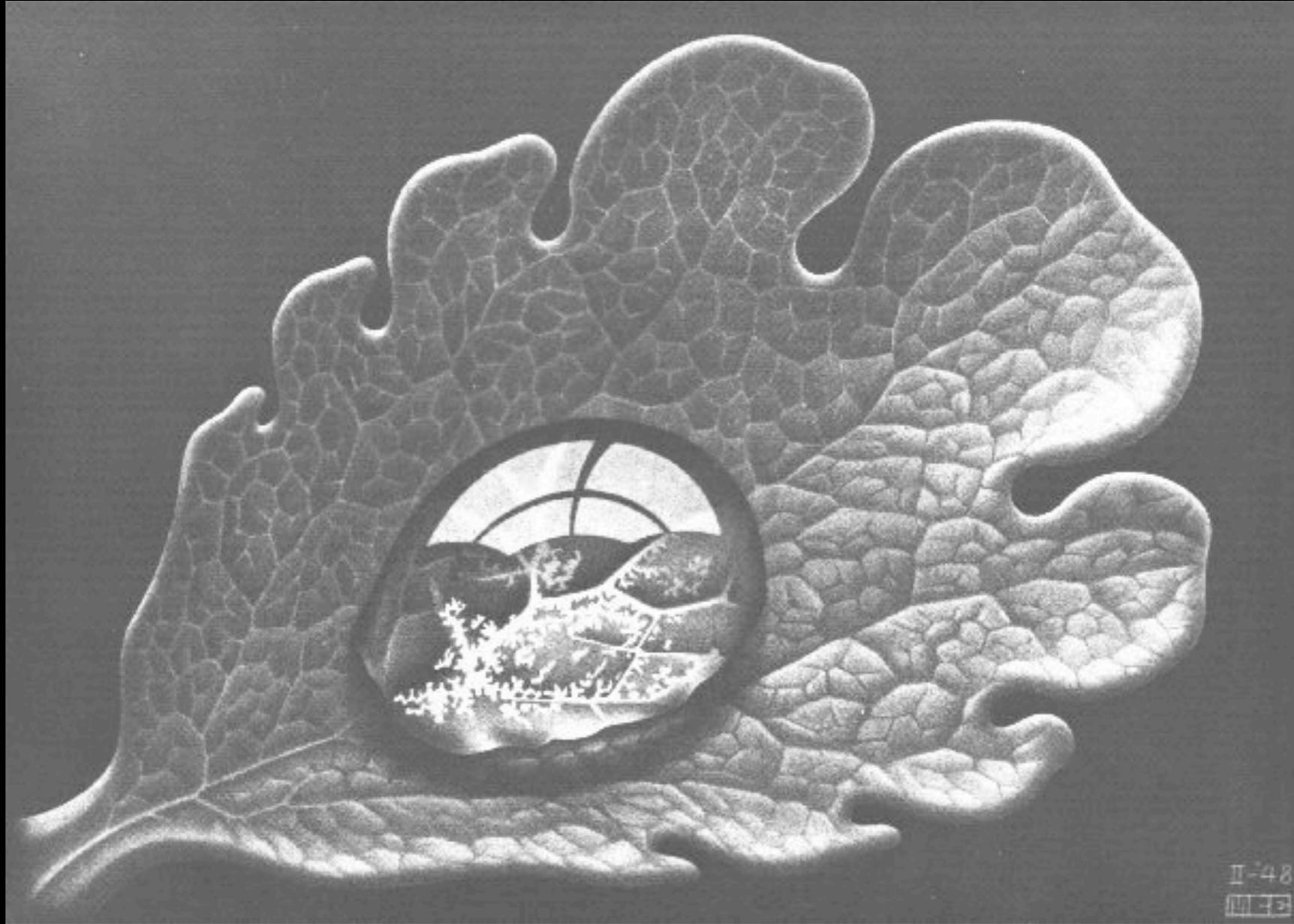
Essayez vous même !

Voyons combien de disques nous pouvons  
traiter...

Nous avons résolu  
un problème  
d'informatique,  
  
sans  
ordinateurs

A stylized Earth with a blue lens flare and the word 'IMAGINE' overlaid. The Earth is depicted with a blue and purple color palette, showing continents and oceans. A bright blue light source is positioned behind the Earth, creating a lens flare effect with several overlapping blue circles. The word 'IMAGINE' is written in a white, serif font across the center of the Earth. The entire scene is set against a black background and is enclosed within a white rectangular border.

IMAGINE



# Merci de votre attention

